

$$\int_0^{\infty} f$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\int_{\gamma} f$$

$$z=f(x,y)$$

$$\nabla f$$

$$\iint f$$

$$y'=f(x,y)$$

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Filippo Gazzola

Analisi Matematica 2

FILIPPO GAZZOLA

Analisi Matematica 2

$$\int_0^\infty f$$

$$\sum_{n=0}^\infty a_n$$

$$\int_\gamma f$$

$$z=f(x,y)$$

$$\nabla f$$

$$\iint f$$

$$y'=f(x,y)$$

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n$$

$$\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$$

ISBN 978-88-9385-309-5

© Copyright 2022

Società Editrice Esculapio s.r.l.

Via Terracini, 30 – 40131 Bologna

www.editrice-esculapio.com – info@editrice-esculapio.it

Impaginazione copertina: Carlotta Lenzi

Stampato da: Legodigit – Lavis (TN)

Printed in Italy

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del volume.

CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali

Corso di Porta Romana, n. 108 - 20122 Milano

e-mail: autorizzazioni@clearedi.org - sito: <http://www.clearedi.org>.

Prefazione

Di libri di Analisi Matematica 2 ce ne sono tanti in commercio. È chiaro che ogni Docente ha il proprio modo di valorizzare i diversi argomenti ed è altrettanto chiaro che ogni corso di Analisi 2 ha un programma leggermente diverso dagli altri. Ma il motivo che mi ha spinto a scrivere questo libro non è da cercarsi tra questi. Ho voluto provare a scrivere un libro utilizzando il linguaggio più semplice possibile, che risulti leggibile a tutti gli studenti. Ho quindi sintetizzato al massimo gli argomenti, preferendo dilungarmi in descrizioni qualitative ed evitando eccessivi formalismi. Ho poi cercato di coinvolgere gli studenti nella lettura e di farli sentire protagonisti, lasciando a loro il compito di completare alcune (piccole) parti del libro. Il mio auspicio è che questo libro funga anche da quaderno, che lo studente non sia costretto a prendere troppi appunti durante le lezioni in modo da restare concentrato sulle spiegazioni.

Sarò grato a chiunque mi vorrà fare critiche costruttive o mi segnalerà eventuali errori nel testo.

Milano, settembre 2022.

Filippo Gazzola

Indice

1	Integrali generalizzati e serie numeriche	1
1.1	Integrali impropri	1
1.2	Serie	8
1.2.1	Definizione e prime proprietà	8
1.2.2	Alcune serie fondamentali	10
1.2.3	Serie a termini positivi	12
1.2.4	Serie a termini di segno alterno	14
1.3	Serie e integrali impropri	17
2	Curve nel piano e nello spazio	19
2.1	Curve in forma parametrica	19
2.2	Proprietà delle curve	22
2.3	Lunghezza di una curva, integrali di linea	25
2.4	Curvatura e torsione	28
3	Funzioni reali di più variabili	35
3.1	Motivazione e insiemi di definizione	35
3.2	Limiti e continuità	39
3.3	Derivabilità e differenziabilità	41
3.4	La formula di Taylor	48
3.5	Ottimizzazione libera	50
3.6	Ottimizzazione vincolata	53
3.6.1	Il metodo geometrico delle curve di livello	53
3.6.2	Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange	54
3.6.3	Il metodo delle restrizioni	57
4	Integrazione multipla	59
4.1	Integrali doppi	59
4.2	Cambi di variabile negli integrali doppi	65
4.3	Integrali tripli	70
4.4	Cambi di variabile negli integrali tripli	72
4.5	Breve cenno agli integrali multipli generalizzati	74
5	Funzioni di più variabili a valori vettoriali	75
5.1	Campi vettoriali	75
5.2	Lavoro di un campo vettoriale	79
5.3	Superfici in forma parametrica	84
5.4	Formula di Gauss-Green nel piano	87
5.5	Integrali di superficie	90
5.6	Superfici orientate e flusso	93
5.7	Campi solenoidali e potenziale vettore	96
5.8	Teoremi della divergenza e del rotore	98

6	Serie di funzioni	101
6.1	Serie di potenze	101
6.1.1	Nel campo complesso	101
6.1.2	Nel campo reale	103
6.2	Serie di Fourier	108
6.2.1	Forma trigonometrica	108
6.2.2	Funzioni pari e dispari, periodi diversi da 2π	114
6.2.3	Forma esponenziale complessa	116
7	Equazioni differenziali	117
7.1	Definizioni e motivazioni	117
7.2	Esistenza e unicità	119
7.3	Equazioni a variabili separabili	120
7.4	Equazioni lineari	123
7.5	Equazioni omogenee, equazioni di Bernoulli	125
7.6	Prolungamento delle soluzioni	128
7.7	Equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti	129
8	Sistemi differenziali lineari	135
8.1	Il principio di sovrapposizione	135
8.2	Sistemi lineari omogenei	136
8.3	Sistemi omogenei a coefficienti costanti	138
8.4	Sistemi non omogenei	141

1 Integrali generalizzati e serie numeriche

1.1 Integrali impropri

Indichiamo con $C^0[a, b]$ lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ e con $R[a, b]$ lo spazio delle funzioni integrabili su $[a, b]$. Sappiamo che vale l'implicazione

$$f \in C^0[a, b] \implies f \in R[a, b]$$

e ci chiediamo se si possa indebolire l'ipotesi. Se f ha una discontinuità eliminabile in $c \in (a, b)$ è sufficiente dividere l'intervallo e scrivere

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (1.1)$$

Infatti, qualunque valore venga attribuito a $f(c)$, l'area del segmento sotteso è sempre nulla e non cambia il valore dell'integrale. Con analogo ragionamento è possibile trattare le discontinuità di tipo salto: se f ha una discontinuità di tipo salto in $c \in (a, b)$ possiamo ancora utilizzare la (1.1). La Figura 1.1 illustra il significato della (1.1).

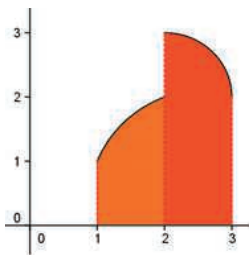


Figura 1.1: Integrale di una funzione discontinua.

Possiamo quindi concludere che

$$\left. \begin{array}{l} f \in C^0[a, b] \text{ a meno di un numero finito di discontinuità} \\ \text{eliminabili o di tipo salto in } [a, b] \end{array} \right\} \implies f \in R[a, b].$$

Vorremmo però poter integrare anche funzioni più irregolari. Supponiamo che

$$f \in C^0(a, b] \quad \text{con} \quad a > -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty. \quad (1.2)$$

Analoghe considerazioni valgono per intervalli $[a, b)$ e per limiti $-\infty$ o che non esistono. Chiaramente, abbiamo $f \in R[a + \varepsilon, b]$ per ogni $\varepsilon > 0$ e possiamo quindi calcolare

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Definizione 1.1. Supponiamo che valga la (1.2). Se esiste finito

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = I$$

diremo che f è integrabile in senso improprio (generalizzato) su $[a, b]$ e porremo

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

In tal caso, diremo anche che $\int_a^b f$ converge.

Da un punto di vista geometrico si tratta di calcolare l'area di una “regione di base zero e altezza infinita”, vedere la Figura 1.2. La base di lunghezza

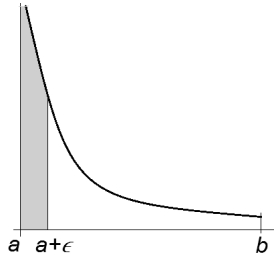


Figura 1.2: Area sottesa da una funzione illimitata.

ε tende a zero ma l'altezza è infinita. Siamo quindi di fronte a una forma indeterminata $0 \cdot \infty$ e lo scopo è quello di misurare l'infinito di f . Vediamo come si quantifica l'infinito di f con un esempio fondamentale.

Esempio 1.2. Per $\alpha > 0$ vogliamo studiare la convergenza dell'integrale

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Risulta

$$I_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - 1 \right) = +\infty & (\alpha > 1) \\ -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \varepsilon = +\infty & (\alpha = 1) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha} & (\alpha < 1) \end{cases}.$$

Pertanto, I_α converge se e solo se $\alpha < 1$. Si osservi che $I_\alpha \rightarrow +\infty$ per $\alpha \rightarrow 1^-$.

L'Esempio 1.2 mostra quanto l'infinito di una funzione f debba essere piccolo per fare convergere il suo integrale improprio.

Vediamo adesso un altro tipo di integrale improprio. Supponiamo che

$$f \in C^0[a, +\infty) \quad \text{con} \quad a > -\infty \quad (1.3)$$

e vogliamo capire se è possibile dare un significato all'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

È chiaro che per ogni $b < +\infty$, risulta $f \in R[a, b]$. In sintonia con la Definizione 1.1 diamo quindi la

Definizione 1.3. *Supponiamo che valga la (1.3). Se esiste finito*

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = I$$

diremo che f è integrabile in senso improprio (generalizzato) su $[a, +\infty)$ e porremo

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = I.$$

In tal caso, diremo anche che $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Dato che l'intervallo è illimitato, viene da pensare che $f(x)$ debba tendere a 0 per $x \rightarrow +\infty$. Come vedremo nell'Esempio 1.32 non è proprio così. Ma è chiaro che vale l'implicazione

$$\left. \begin{array}{l} \text{vale l'ipotesi (1.3)} \\ \text{esiste } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \\ \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \ell = 0. \quad (1.4)$$

Pertanto, dobbiamo adesso calcolare l'area di una “regione di base infinita

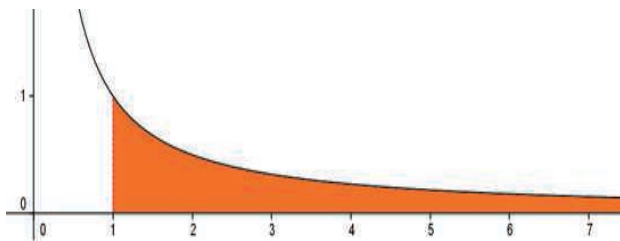


Figura 1.3: Area sottesa da una funzione su un intervallo illimitato.

e altezza zero”, come in Figura 1.3. Vediamo come si quantifica l’infinitesimo di f con un esempio fondamentale, simile all'Esempio 1.2.

Esempio 1.4. Per $\alpha > 0$ vogliamo studiare la convergenza dell'integrale

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Risulta

$$I_\alpha = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) = +\infty & (\alpha < 1) \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \log b = +\infty & (\alpha = 1) \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1} (1 - b^{1-\alpha}) = \frac{1}{\alpha-1} & (\alpha > 1) . \end{cases}$$

Pertanto, I_α converge se e solo se $\alpha > 1$. Si osservi che $I_\alpha \rightarrow +\infty$ per $\alpha \rightarrow 1^+$.

Gli Esempi 1.2 e 1.4 possono essere utilizzati per studiare l'integrabilità di classi di funzioni più ampie. All'uopo, enunciamo due criteri di convergenza degli integrali impropri per funzioni positive.

Proposizione 1.5. (Criterio del confronto)

Sia I un intervallo (eventualmente illimitato), siano $f, g \in C^0(I)$ due funzioni tali che $f(x) \geq g(x) \geq 0$ su I . Allora

$$\int_I g(x) dx = +\infty \implies \int_I f(x) dx = +\infty,$$

$$\int_I f(x) dx < +\infty \implies \int_I g(x) dx < +\infty.$$

Applicando due volte questo criterio, si ottiene:

Proposizione 1.6. (Criterio dell'asintotico)

Siano $f, g \in C^0(a, b]$ tali che $f(x), g(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b]$, con $a \geq -\infty$ (anche $-\infty$ è concesso). Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow a$, allora

$$\int_I f(x) dx < +\infty \iff \int_I g(x) dx < +\infty.$$

Osserviamo che l'ipotesi di segno è per “non fare divergere l'integrale a $-\infty$ ”. Naturalmente, se le funzioni fossero negative, si avrebbero enunciati analoghi cambiando il segno dell'infinito. Inoltre, l'intervallo $(a, b]$ può essere sostituito con $[a, b)$ in modo ovvio. Infine, ribadiamo come tutti gli enunciati visti finora si debbano adattare a tutte le situazioni analoghe (cambiando il segno degli infiniti, il segno delle funzioni, intervalli aperti a destra o a sinistra, ecc.): non abbiamo voluto enunciare tutte le possibili situazioni per non appesantire gli appunti. Vediamo alcuni esercizi di applicazione dei criteri appena esposti.

Esercizio 1.7. *Stabilire se i seguenti integrali convergono.*

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} \quad (b) \int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad (c) \int_0^{1/2} e^x \log(x) dx.$$

(a)

(b)

(c)

Ci sono però degli integrali che non si possono studiare con questi criteri e per i quali si è costretti ad utilizzare la definizione.

Esercizio 1.8. *Mostrare che i seguenti integrali divergono.*

$$(a) \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \log x} \quad (b) \int_2^\infty \frac{dx}{x \log x}.$$

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \quad \quad \quad e \text{ quindi:}$$

(a)

(b)

Se una funzione avesse più di un punto “sospetto” da analizzare, bisognerebbe ripetere i controlli appena descritti in ogni punto: solo se tutti i controlli andassero a buon fine potremmo concludere che l'integrale converge.

Esercizio 1.9. *Stabilire se i seguenti integrali convergono.*

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}} \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\log x} \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{e^{\sqrt{x}}-1}.$$

(a)

(b)

(c)

La regola del controllo di tutti i punti sospetti non ammette deroghe. Se la domanda fosse di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

verrebbe spontaneo rispondere che l'integrale converge dato che l'integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto allo 0. Ma **questa risposta sarebbe sbagliata!** Dovremmo prima controllare l'integrabilità per $x \rightarrow 0^+$ e, dato che questa non sussiste, potremmo subito concludere che l'integrale non converge. Di fatto non si ha integrabilità neanche per $x \rightarrow 0^-$ ma le due non-integrabilità non si elidono!

Collegato a quanto appena visto, vediamo con un esempio come un semplice ragionamento può diventare vincente.

Esempio 1.10. *Vogliamo stabilire se converge l'integrale*

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$$

Dato che $\sin x$ si annulla del prim'ordine in $x = \pi$ (il grafico attraversa l'asse delle x in modo obliquo), ne deduciamo che $1/\sin x$ è un infinito del prim'ordine per $x \rightarrow \pi$. Quindi l'integrale non converge.

Finora abbiamo considerato funzioni positive (o negative) sull'intervallo di integrazione. Naturalmente, quello che conta è che siano definitivamente di segno costante quando si avvicinano al punto sospetto. Cosa possiamo dire di una funzione che, avvicinandosi a un estremo, oscilla con “frequenza” sempre maggiore? Se

$$f \in C^0(a, b] \quad \text{con} \quad a > -\infty \quad \text{e} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad (1.5)$$

possiamo ancora usare la Definizione 1.1 ma non abbiamo un modo semplice per verificarla, a meno che la funzione rimanga limitata.

Esempio 1.11. *Vogliamo stabilire se converge l'integrale*

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

L'integranda è rappresentata in Figura 1.4. Usando la Definizione 1.1 abbiamo

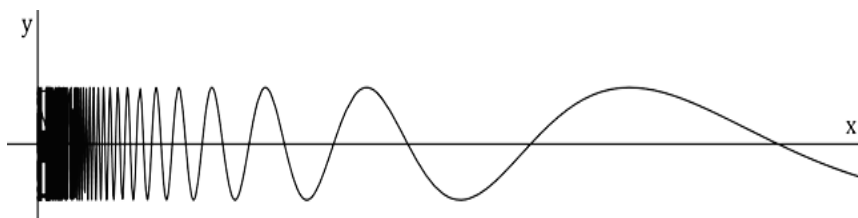


Figura 1.4: Grafico della funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \in (0, 1]$.

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Dato che $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$, per ogni $0 < \gamma < \varepsilon$ abbiamo che

$$-\varepsilon < \gamma - \varepsilon < \int_{\gamma}^{\varepsilon} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx < \varepsilon - \gamma < \varepsilon$$

e dunque l'integrale converge.

Pertanto, se una funzione ha forti oscillazioni ma rimane limitata in un intorno di un punto al finito, possiamo concludere che sia integrabile. Diversa è la situazione quando è illimitata. Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla ma è anche illimitata per $x \rightarrow 0^+$, vedi Figura 1.5.

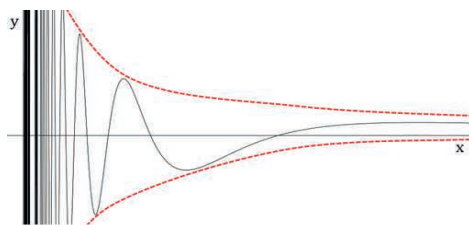


Figura 1.5: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \in (0, 1]$.

In tal caso, abbiamo la possibilità di vedere se converge l'integrale $\int |f|$ al quale possiamo sperare di potere applicare il criterio del confronto per poi sfruttare l'implicazione (che non è un'equivalenza!)

$$\int_I |f| < +\infty \implies \int_I f \text{ converge.} \quad (1.6)$$

Oppure, possiamo procedere “a mano”, analizzando il caso specifico. Tuttavia, in alcuni casi solo tecniche molto sofisticate consentono di rispondere, come nel caso della funzione $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in Figura 1.5. Ma vediamo alcuni esempi dove la risposta è possibile.

Esempio 1.12. *Vogliamo stabilire se convergono gli integrali*

$$(a) \int_0^{+\infty} \sin(x) dx \quad (b) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Dato che

$$\int_0^{2k\pi} \sin(x) dx = 0, \quad \int_0^{(2k+1)\pi} \sin(x) dx = 2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

non esiste

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d \sin(x) dx$$

e quindi l'integrale (a) non converge.

Dato che $|\frac{\cos(x)}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ su $[\frac{\pi}{2}, +\infty)$ e che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$, l'integrale (b) converge.

La funzione $\frac{\sin(x)}{x}$ è limitata per $x \rightarrow 0^+$. Per ogni $d > \frac{\pi}{2}$, con una integrazione per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^d \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\pi/2}^d \frac{\sin(x)}{x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\cos d}{d} - \int_{\pi/2}^d \frac{\cos(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

e quindi (c) converge per quanto visto al punto (b).

1.2 Serie

1.2.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 1.13. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Chiamiamo serie degli a_n , e la indichiamo con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (1.7)$$

la successione $\{S_k\}$ definita da

$$S_k = \sum_{n=0}^k a_n. \quad (1.8)$$

Se esiste, il seguente limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n$$

si chiama somma della serie.

Abbiamo voluto iniziare con questa definizione per chiarire da subito che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{non indica una somma infinita ma un limite.}$$

Data la serie (1.7), chiameremo **somma parziale k-esima** la S_k definita in (1.8). È chiaro che per ogni $k \in \mathbb{N}$ (finito!) è possibile calcolare S_k : se k è molto grande serve molto tempo ma, in ogni caso, un tempo finito. Invece, se immaginiamo che per calcolare una qualunque somma serva un certo tempo, anche

brevissimo come 10^{-1000} secondi, servirebbe comunque un tempo infinito per calcolare una somma di infiniti addendi. Ecco perché è importante sottolineare come (1.7) sia un limite e non una somma infinita. Dalla Definizione 1.13 deduciamo che

la somma della serie è il limite della successione delle somme parziali.

Come per ogni successione, siamo interessati a determinarne il carattere e cioè a stabilire se la successione è convergente, divergente, indeterminata. Il carattere di una serie è il carattere della successione delle somme parziali.

Esempio 1.14. Se $a_n = 1$ per ogni n , allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente; infatti, $S_k = k$ diverge. Se $a_n = (-1)^n$ per ogni n , allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è indeterminata; infatti, $S_k = -1$ se k è dispari e $S_k = 0$ se k è pari e cioè la successione $\{S_k\}$ è indeterminata.

Trovare serie convergenti è più complicato. Sicuramente, è necessario che la successione $\{a_n\}$ dei suoi termini sia infinitesima:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (1.9)$$

Tuttavia, come vedremo, non è vero il viceversa.

Un esempio di serie convergente si ottiene con un ragionamento... goloso! Supponiamo di avere una torta di compleanno di forma rettangolare di base $2m$ e altezza $1m$. Il festeggiato inizia a tagliare la torta e, nella sua posizione privilegiata, si prende una fetta pari a metà torta ($1mq$ di torta!). Subito dopo tocca alla sua fidanzata che, per non essere da meno, si prende la metà di quello che resta: la fetta numero 2 di $0,5mq$, vedere la Figura 1.6.

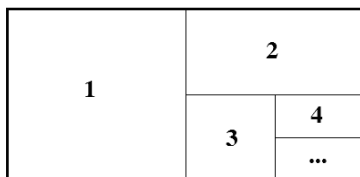


Figura 1.6: Una torta rettangolare divisa in infinite fette.

Poi tocca ai parenti e agli amici e tutti seguono la stessa regola: ognuno si prende la metà di quello che resta. Poi si fa il bis e il tris, sempre rispettando questa regola perché gli ospiti sono educati e nessuno osa prendere l'ultima fetta, nemmeno quando è rimasta una minuscola briciola! In questo modo, si faranno infinite fette ma la loro somma (limite della successione delle somme parziali) sarà uguale alla superficie della torta. Abbiamo così dimostrato che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^n} = 2.$$

La serie di termine generale $a_n = 2^{-n}$ è dunque convergente.

Paradosso di Zenone. Achille decide di fare un gara di corsa con una tartaruga. Sapendo di essere più veloce, le concede un certo vantaggio. All'istante iniziale t_0 , Achille si trova nella posizione a_0 e la tartaruga nella posizione $p_0 > a_0$. Viene dato il segnale di partenza: ad un certo istante $t_1 > t_0$ Achille giunge nella posizione inizialmente occupata dalla tartaruga: $a_1 = p_0$. Nel frattempo, la tartaruga ha percorso una distanza positiva, magari piccola: $p_1 > p_0 = a_1$. Quindi, all'istante t_1 , Achille non ha ancora raggiunto la tartaruga. C'è poi un secondo istante t_2 dove $p_2 > p_1 = a_2$, e cioè Achille raggiunge la posizione p_1 ma la tartaruga ha percorso un'altra distanza positiva. Così procedendo, otteniamo una successione di infiniti istanti t_n dove $p_n > p_{n-1} = a_n$: per questa disuguaglianza stretta, in nessuno di questi infiniti istanti Achille raggiungerà la tartaruga. Quindi la tartaruga vince la gara. Come si spiega questo paradosso?

1.2.2 Alcune serie fondamentali

Esempio 1.15. (Serie geometrica)

Sia $q \in \mathbb{R}$ e consideriamo una serie con termine generico pari alle sue potenze: $a_n = q^n$. Una tale serie si chiama serie geometrica di ragione q . Osserviamo che $a_0 = 1$ per qualunque q . Per la Definizione 1.13, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k q^n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k.$$

Ovviamente, se $q = 1$ abbiamo $S_k = k + 1$ e la serie diverge. Supponiamo dunque $q \neq 1$ e osserviamo che

$$S_k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k, \quad qS_k = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^{k+1}$$

da cui, sottraendo ed eliminando i termini simili,

$$(1 - q)S_k = 1 - q^{k+1} \implies S_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Facendo tendere $k \rightarrow \infty$ abbiamo le seguenti risposte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Pertanto, la serie geometrica converge se $|q| < 1$, diverge se $q \geq 1$, è indeterminata se $q \leq -1$.

Esempio 1.16. (Serie telescopica)

Se possiamo scrivere $a_n = b_n - b_{n+1}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

si dice *telescopica*. Osserviamo che, in tal caso, i termini nelle somme parziali si elidono a due a due:

$$\sum_{n=0}^k a_n = \sum_{n=0}^k [b_n - b_{n+1}] = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{k+1}.$$

Pertanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k a_n = b_0 - \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

e la convergenza di una serie telescopica equivale alla convergenza della successione $\{b_n\}$.

Esempio 1.17. (Serie di Mengoli)

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

si chiama *serie di Mengoli*. Osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

otteniamo

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - \frac{1}{k+1} \rightarrow 1$$

per $k \rightarrow \infty$. Usando una serie telescopica abbiamo dimostrato che **la serie di Mengoli converge**.

Esempio 1.18. (Serie armonica)

Si chiama *serie armonica* la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ricordando che $\log(1+x) \leq x$ per ogni $x > -1$, otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} &\geq \sum_{n=1}^k \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^k \log \frac{n+1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^k [\log(n+1) - \log(n)] = \log(k+1) \rightarrow \infty \quad \text{per } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Usando una serie telescopica abbiamo dimostrato che **la serie armonica diverge**.

La serie armonica mostra che, come per gli integrali impropri, non è sufficiente che il termine generico tenda a zero all'infinito. Così come $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow \infty$ non garantisce la convergenza di $\int_0^\infty f$, anche $a_n = o(1)$ per $n \rightarrow \infty$ non garantisce la convergenza di $\sum_n a_n$: la (1.9) non è un'equivalenza.

1.2.3 Serie a termini positivi

Definizione 1.19. *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

si dice a termini positivi se $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$; si dice a termini definitivamente positivi se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq N$.

Nel seguito indicheremo con STDP una serie a termini definitivamente positivi. Queste serie godono di importanti proprietà. La più immediata è

una STDP non può essere indeterminata.

Infatti, la successione delle somme parziali è definitivamente crescente e, pertanto, ammette limite finito oppure $+\infty$.

Per le STDP valgono inoltre alcuni importanti criteri di convergenza.

Proposizione 1.20. (Criterio del confronto)

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \geq b_n \geq 0$ definitivamente. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty &\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty. \end{aligned}$$

Applicando due volte questo criterio, si ottiene il

Proposizione 1.21. (Criterio dell'asintotico)

Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due STDP tali che $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow \infty$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Come prima applicazione di questi criteri, vediamo come si comporta la **serie armonica generalizzata** del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0). \quad (1.10)$$

Dagli Esempi 1.17 e 1.18 deduciamo che la serie (1.10) converge se $\alpha \geq 2$ e diverge se $\alpha \leq 1$. Resta da stabilire cosa accade per $\alpha \in (1, 2)$: lo vedremo nel Paragrafo 1.3. Anticipiamo che sarà

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1. \quad (1.11)$$

Come applicazione di (1.11) e dei precedenti criteri, proponiamo il seguente

Esercizio 1.22. Stabilire se le seguenti STDP convergono.

$$(a) \sum_1^{+\infty} \sin \frac{1}{n} \quad (b) \sum_1^{+\infty} \frac{1}{e^n - 1} \quad (c) \sum_1^{+\infty} \frac{\arctan n}{1 + n\sqrt{n}}.$$

(a)

(b)

(c)

Per le STDP valgono altri due criteri che risulteranno utili quando parleremo di serie di potenze nel Paragrafo 6.1.

Proposizione 1.23. (Criterio del rapporto)

Sia $\sum_n a_n$ una STDP. Se esiste

$$\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

allora

$$0 \leq \ell < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty, \quad \ell > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Proposizione 1.24. (Criterio della radice)

Sia $\sum_n a_n$ una STDP. Se esiste

$$\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

allora

$$0 \leq \ell < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty, \quad \ell > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Osserviamo come questi criteri nulla dicano se i limiti cercati non esistono oppure se valgono 1. Per convincersi di questo, basta considerare la serie armonica generalizzata (1.10). Con entrambi i criteri, indipendentemente da α , si trova $\ell = 1$. Ma dalla (1.11) sappiamo invece che la convergenza della serie dipende da α .

Esercizio 1.25. Applicando i criteri del rapporto e della radice a una serie geometrica di ragione $q > 0$ (STDP) osserviamo che:

- se $q < 1$
- se $q > 1$

Il criterio del rapporto è molto utile se compaiono dei fattoriali.

Esempio 1.26. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

è una STDP. Risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Quindi la serie converge. Osserviamo che, alternativamente, si poteva usare il criterio dell'asintotico sfruttando la formula di Stirling:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

1.2.4 Serie a termini di segno alterno

Ci chiediamo adesso se sia possibile caratterizzare anche le serie che non siano STDP. Come per l'integrale improprio, vedi (1.6), vale l'implicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge:} \quad (1.12)$$

siccome $\sum_n |a_n|$ è una STDP, possiamo applicare i criteri del paragrafo precedente; in caso si verifichi l'ipotesi di (1.12) diremo che la serie **converge assolutamente**. Ma, come per l'integrale improprio, a parte questo trucco non ci sono semplici metodi per affrontare serie di termini a segno variabile.

Tuttavia, c'è un caso che si riesce ad affrontare in modo sistematico. Sia $\sum_n a_n$ una STDP, allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

si chiama **serie di termini a segno alterno**. Per queste serie vale il

Proposizione 1.27. (Criterio di Leibniz)

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che:

$$(i) \ a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (ii) \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge. Inoltre:

** la successione delle somme parziali di ordine pari $\{S_{2k}\}$ fornisce una stima per eccesso della somma;*

* la successione delle somme parziali di ordine dispari $\{S_{2k+1}\}$ fornisce una stima per difetto della somma;

* l'errore che si commette approssimando la somma della serie con una sua somma parziale S_k è maggiorato (in valore assoluto) dal primo termine trascurato a_{k+1} .

Osserviamo che le (i) – (ii) automaticamente garantiscono che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, il criterio è ancora valido se queste condizioni valgono definitivamente e non necessariamente su tutti i termini. Dato che la dimostrazione è istruttiva, la vediamo in dettaglio.

Dimostrazione. La (i) implica $S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq S_{2k}$ e cioè la successione delle somme parziali pari è decrescente. Analogamente, la successione delle somme parziali dispari è crescente. Inoltre, dato che $a_{2k+1} \geq 0$,

$$S_1 \leq \dots \leq S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1} \leq S_{2k} \leq \dots \leq S_2$$

e quindi le successioni $\{S_{2k}\}$ e $\{S_{2k+1}\}$ sono anche limitate. Di conseguenza, convergono: per la (ii) sappiamo che

$$S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \rightarrow 0$$

e quindi le due successioni hanno lo stesso limite finito che coincide con la somma della serie che chiamiamo S . Infine, osserviamo che $S_{2k} - a_{2k+1} = S_{2k+1} \leq S \leq S_{2k}$ e pertanto l'errore è più piccolo del primo termine trascurato: in questo caso a_{2k+1} . Analoga dimostrazione si ha per le somme parziali dispari S_{2k+1} . $\square$

Esempio 1.28. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge per il criterio di Leibniz. Infatti $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ monotonamente. Osserviamo che la serie non converge assolutamente (serie armonica) e non è dunque utilizzabile la (1.12). Per avere un'idea della somma S della serie, calcoliamo

$$S_1 = -1, \quad S_2 = -\frac{1}{2}, \quad S_3 = -\frac{5}{6}, \quad S_4 = -\frac{7}{12}, \quad \dots$$

e dunque $-\frac{5}{6} < S < -\frac{7}{12}$.

Esempio 1.29. *Osserviamo che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+(-1)^n n^2}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

e quindi la prima serie converge: è la somma di una serie assolutamente convergente e di una convergente.

L'esempio precedente non deve trarre in inganno, non è sempre possibile utilizzare la “proprietà commutativa”. Vediamo un possibile errore che è bene evitare. Supponiamo di dover studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \right).$$

Questa è una STDP e, dato che $e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, possiamo affermare che essa converge per il Criterio dell'asintotico (Proposizione 1.21). Se però uno usasse la proprietà commutativa, potrebbe ottenere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} - 1 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty - \infty.$$

Pertanto, la proprietà commutativa va usata con cautela e si possono “scomporre le serie” solo se sono entrambe convergenti.

Esempio 1.30. Sia f la funzione rappresentata nella Figura 1.7: è definitivamente positiva e tende monotonamente a 0 per $x \rightarrow \infty$. Si consideri la

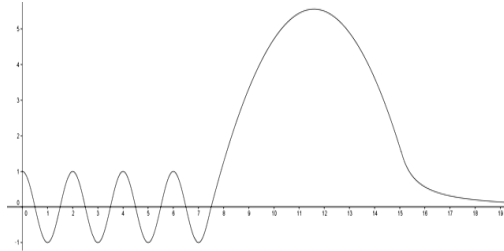


Figura 1.7: Esempio di funzione definitivamente positiva.

serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

che non è a termini di segno alterno dato che $(-1)^1 f(1) > 0$, $(-1)^2 f(2) > 0$ e così fino a $(-1)^8 f(8)$. Ma da $n \geq 8$ in poi, $f(n) > 0$ e quindi $(-1)^n f(n)$ diventa a segno alterno. Inoltre, $f(n+1) \leq f(n)$ per ogni $n \geq 12$. Di conseguenza,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n) = \sum_{n=1}^{11} (-1)^n f(n) + \sum_{n=12}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

con la prima sommatoria (finita!) che fornisce un numero finito e la seconda sommatoria (serie) che converge per il criterio di Leibniz.

1.3 Serie e integrali impropri

Vi è un naturale collegamento tra le serie e gli integrali impropri considerati nella Definizione 1.3. Per $\alpha \in (1, 2)$ consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall x \in [1, +\infty).$$

Osserviamo che sotto al suo grafico è possibile inserire quello della funzione costante a tratti definita da

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq f(x) \quad \forall x \in (n, n+1] \quad (1.13)$$

si veda la Figura 1.8.

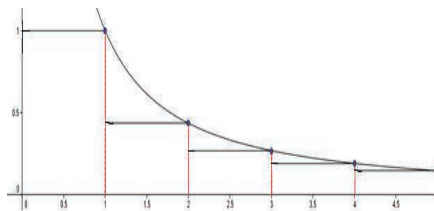


Figura 1.8: Minorazione di una funzione con una funzione costante a tratti.

La (1.13) e l'Esempio 1.4 consentono di ottenere la maggiorazione seguente:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} g(x) dx \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

che prova la (1.11) anche per $\alpha \in (1, 2)$ che era il caso mancante.

Più generalmente, sarà possibile “inscatolare” funzioni continue tra funzioni costanti a tratti e procedere analogamente. Minorare una funzione positiva su $[1, +\infty)$ con una funzione positiva e costante a tratti serve per provare la convergenza di una serie a partire dalla convergenza di un integrale improprio, come nel caso appena visto. Viceversa, maggiorare una funzione positiva su $[1, +\infty)$ con una funzione positiva e costante a tratti serve per provare la divergenza di una STDP a partire dalla divergenza di un integrale improprio.

Esercizio 1.31. Utilizzando l'Esercizio 1.8, provare che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{n \log n} \geq$$

Come promesso, concludiamo con un esempio che mostra come l'ipotesi che esista $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ nell'implicazione (1.4) non sia una condizione necessaria per la convergenza dell'integrale improprio.

Esempio 1.32. Consideriamo la funzione $f \in C^0[2, +\infty)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} n^2(x - n) & \text{se } x \in [n, n + \frac{1}{n^2}] \\ n^2(n + \frac{2}{n^2} - x) & \text{se } x \in [n + \frac{1}{n^2}, n + \frac{2}{n^2}] \\ 0 & \text{se } x \in [n + \frac{2}{n^2}, n + 1] \end{cases}.$$

Questa espressione permette di definire f sull'intervallo $[n, n + 1]$ per ogni $n \geq 2$: facendo poi variare n , otteniamo la definizione su $[0, +\infty)$. Il grafico della funzione f è rappresentato in Figura 1.9. Osserviamo che non esiste

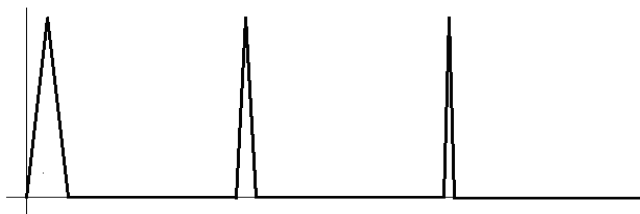


Figura 1.9: Grafico della funzione f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e che il grafico di f sottende una successione di triangoli di base $2/n^2$ e altezza 1, e cioè di area $1/n^2$. Pertanto, otteniamo una serie armonica generalizzata e risulta

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^b \frac{1}{n^2} < \infty$$

dove abbiamo scelto di far variare b in $\mathbb{N}$. Abbiamo trovato un esempio di funzione f che non ammette limite all'infinito ma che ha un integrale improprio convergente.

2 Curve nel piano e nello spazio

2.1 Curve in forma parametrica

Chiamiamo **curva in forma parametrica** una funzione continua $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; per semplicità, spesso parleremo solo di curva o di linea. Se $n = 2$ diremo che la curva è piana. Indichiamo con $r = r(t)$ la posizione di un punto mobile nello spazio $\mathbb{R}^n$ al tempo t : si pensi al volo di una mosca nello spazio ($\mathbb{R}^3$) o allo spostamento di una formica sul pavimento ($\mathbb{R}^2$). Pertanto, una curva $r = r(t)$ è un vettore formato da n funzioni del tempo: $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ dove ognuna delle funzioni scalari r_i ($i = 1, \dots, n$) è una funzione continua: in alcuni casi, è utile esprimere la curva come

$$r(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) e_i$$

dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Un esempio semplice di curva in forma parametrica lo abbiamo già incontrato: una retta nello spazio $\mathbb{R}^3$ si può descrivere con le tre equazioni

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t, \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

dove il punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ risulta essere la posizione iniziale all'istante $t = 0$. Un altro esempio è quello di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che, anziché con $y = f(x)$, possiamo rappresentare con $x(t) = t$ e $y(t) = f(t)$.

Abbiamo finora data per scontata la nozione di continuità; anche se è intuitiva, sarebbe bene dare una definizione rigorosa. Sia i limiti che la continuità sono riconducibili a quelli delle funzioni scalari. Diremo che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r^0 \in \mathbb{R}^n$$

se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |r(t) - r^0| = 0 \iff \lim_{t \rightarrow t_0} r_i(t) = r_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

dove $r_i(t)$ e r_i^0 rappresentano, rispettivamente, le i -esime componenti di $r(t)$ e r^0 ; può anche essere $t_0 = \pm\infty$. Pertanto il limite di una funzione $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ può essere descritto sia come limite nullo del modulo della differenza tra vettori (e quindi uno scalare) oppure come n limiti di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Per sottolineare l'analogia con le funzioni scalari, nel caso in cui t_0 sia finito proponiamo anche la definizione con ε, δ , tanto amata dagli studenti:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r^0 \in \mathbb{R}^n \iff \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |r(t) - r^0| < \varepsilon \right).$$

Formalmente, questa definizione è identica a quella per le funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma, attenzione, il modulo che contiene il vettore $r(t) - r^0$ rappresenta, di fatto, la norma Euclidea in $\mathbb{R}^n$. Una differenza con il caso scalare è invece che non ha nessun significato ragionevole dire che $r(t)$ tende a infinito.

Per la ben nota proprietà dei limiti delle funzioni di una variabile reale, se esiste, il limite è unico. Valgono poi anche le proprietà per la somma e per il prodotto con uno scalare. Una volta definiti i limiti il passo per arrivare alla continuità è molto breve. Diciamo che $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è continua in t_0 se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0).$$

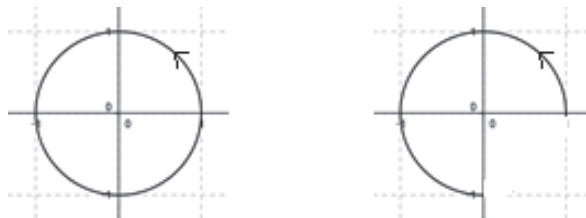
Ecco qua, adesso una curva in forma parametrica è rigorosamente definita.

Vediamo alcuni esempi di come si possono rappresentare le curve in forma parametrica. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo; chiameremo **sostegno di una curva** $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'insieme $r(I)$, cioè l'insieme delle posizioni raggiunte dal punto mobile $r(t)$ quando t varia in I . Il sostegno di una curva è un'entità geometrica (statica) che risulta importante per capire dove si muove il punto mobile ma fa perdere l'informazione cinematica: un conto è dire “sono andato da Milano a Bologna”, un conto è descrivere con precisione la posizione sulla strada in ogni istante, ivi comprese le eventuali soste o inversioni a U. Cominciamo a rappresentare il sostegno di alcune semplici curve piane.

Esempio 2.1. Siano $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\rho : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite da

$$r(t) = \rho(t) \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}.$$

Allora, i sostegni delle curve si rappresentano come nella figura seguente (r a sinistra, ρ a destra). Osserviamo come sia necessario precisare l'intervallo di



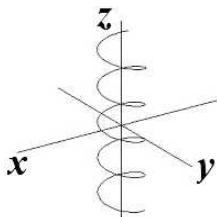
tempo considerato. Per entrambe le curve si ha $r(0) = \rho(0) = (1, 0)$.

Vediamo poi un caso di curva nello spazio, un'elica cilindrica.

Esempio 2.2. Sia $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t.$$

Allora, il sostegno di r si rappresenta come nella figura seguente:



Ci sono poi curve che richiedono una certa analisi per poter tracciare il loro sostegno.

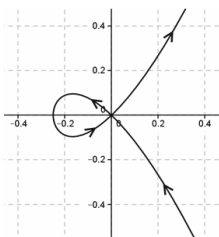
Esempio 2.3. Sia $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$r(t) \begin{cases} x(t) = t(t-1) \\ y(t) = t(t-1)(2t-1) \end{cases}.$$

Osservando le equazioni parametriche, troviamo 2 istanti dove si annulla la x e 3 dove si annulla la y :

$$r(0) = (0, 0), \quad r(1) = (0, 0), \quad r(1/2) = (-1/4, 0).$$

Vediamo poi che, se $t \rightarrow \pm\infty$ allora $x(t) \sim t^2$ e $y(t) \sim 2t^3$ e quindi $y \sim \pm 2x^{3/2}$. È poi facile trovare per quali t le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ ammettono massimi o minimi locali o assoluti. Allora, r si rappresenta come nella figura seguente:



Invitiamo il lettore a mettere i valori di t nei punti “interessanti” di questa figura.

Abbiamo visto che rappresentare una curva in forma parametrica consiste nel disegnare il suo sostegno con una freccia che indica il verso di percorrenza. È chiaro che uno stesso sostegno può essere percorso in infiniti modi diversi.

Esercizio 2.4. Siano $r^1, r^2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definite da

$$r^1(t) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, \quad r^2(t) \begin{cases} x(t) = 1-t \\ y(t) = (1-t)^2 \end{cases}, \quad r^3(t) \begin{cases} x(t) = \sin^2 t \\ y(t) = \sin^4 t \end{cases}.$$

Rappresentare il sostegno di r^1 , r^2 , r^3 e discutere i vari modi di percorrenza.

r^1
 Il sostegno di r^2 è e viene percorso
 r^3

Due curve si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso sostegno. Sostanzialmente, due curve equivalenti dipendono da un cambio di variabile. Se $r = r(t)$ con $t \in [a, b]$ ha per sostegno γ e se $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è una funzione continua e strettamente monotona, allora la curva $\rho(t) := r(\phi(t))$, con $t \in [c, d]$, ha lo stesso sostegno γ . Se poi ϕ è strettamente crescente, il verso di percorrenza di γ è lo stesso, se invece ϕ è decrescente, γ viene percorsa in senso inverso. Il verso di percorrenza si chiama anche *orientazione* della curva. Si usa dire che $\rho(t)$ è una *riparametrizzazione* di $r(t)$. Riparametrizzare una curva significa modificare la legge oraria del punto mobile, fermo restando il sostegno: possiamo andare da Milano a Bologna in diversi modi. Se ϕ è decrescente, significa andare da Bologna a Milano. Se ϕ non fosse strettamente monotona, significherebbe che, durante il percorso il punto mobile si arresta e cambia verso di percorrenza.

2.2 Proprietà delle curve

Diremo che una curva $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è:

- **chiusa** se $r(a) = r(b)$;
- **semplice** se $r : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva.

Sottolineiamo che, per una curva semplice, l'iniettività è richiesta solo sull'intervallo *aperto*. Le due curve dell'Esempio 2.1 sono semplici, r è anche chiusa. La curva dell'Esempio 2.2 è semplice ma non chiusa. La curva dell'Esempio 2.3 non è né semplice, né chiusa.

Definizione 2.5. Diremo che una curva $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è **regolare** se $r \in C^1(a, b)$ e se $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$.

Questa definizione merita una certa attenzione. Intanto, osserviamo che stiamo parlando di derivate senza averle definite; il motivo è che la definizione non riserva sorprese:

$$r'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

dove, di fatto, stiamo considerando n rapporti incrementali. Dire che $r \in C^1(a, b)$ significa che il vettore derivato è continuo e questa proprietà è richiesta solo nell'intervallo aperto, agli estremi r potrebbe anche non essere derivabile. Ma questo non basta: la richiesta che sia $r'(t) \neq 0$ (sempre nell'aperto) è una condizione vettoriale, questo vuol dire che le componenti di $r'(t)$ non possono annullarsi contemporaneamente, e cioè che $|r'(t)| \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$; e questo significa che *il punto mobile non si ferma mai*. Infatti, $r'(t)$ rappresenta il vettore velocità (dotato di direzione, verso, norma) che risulta essere tangente al sostegno di r nel punto $r(t)$, come in Figura 2.1. Il

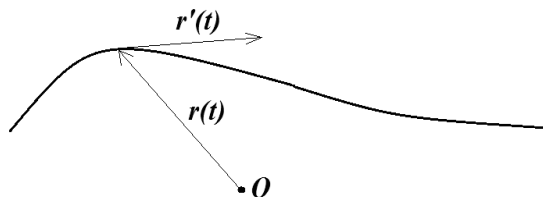


Figura 2.1: Vettore velocità tangente al sostegno di una curva.

vettore $r'(t)$ risulta essere il limite di un rapporto incrementale che ha come numeratore un vettore corda tra due istanti di tempo vicini. La norma

$$v(t) = |r'(t)| \quad (2.1)$$

viene chiamata **velocità scalare** e il vettore

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{r'(t)}{v(t)} \quad (2.2)$$

risulta essere il *versore tangente*. La proprietà di essere C^1 si vede facilmente dall'espressione analitica, ma il fatto di essere regolare richiede il calcolo della derivata. Vediamo due esempi significativi.

Il primo esempio riguarda le curve in *forma polare*. Nell'Esempio 2.1 abbiamo visto che la circonferenza di raggio $\rho > 0$ centrata nell'origine si può descrivere con la curva

$$x(t) = \rho \cos t, \quad y(t) = \rho \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Cosa accadrebbe se anche il raggio fosse variabile, $\rho = \rho(t)$, pur rimanendo $\rho(t) > 0$ per ogni t ? Una curva di questo tipo si dice in forma polare perchè il modulo si scrive in funzione dell'argomento, $\rho = \rho(\vartheta)$ in coordinate polari. In tal caso la curva si scrive

$$r(t): \quad x(t) = \rho(t) \cos t, \quad y(t) = \rho(t) \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2.3)$$

e due situazioni diverse si possono creare. Se $\rho(2\pi) = \rho(0)$ la curva è chiusa, altrimenti non lo è. Nel primo caso, il supporto è simile a quello di sinistra nella Figura 2.2, nel secondo caso è invece simile a quello di destra.

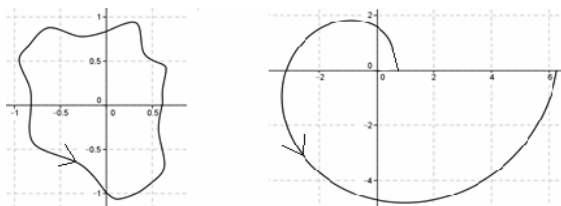


Figura 2.2: Sostegni di curve in forma polare.

Se $\rho \in C^1(0, 2\pi)$, possiamo calcolare

$$|r'(t)|^2 = \rho(t)^2 + \rho'(t)^2 > 0 \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

e quindi r è regolare nella sola ipotesi che $\rho(t) > 0$, cioè che il sostegno non contenga l'origine. La precedente formula si ottiene usando la proprietà $\cos^2 + \sin^2 = 1$; lasciamo al lettore la verifica dei dettagli.

Esercizio 2.6. *Rappresentare il sostegno delle curve*

$$\begin{aligned} r_1(t) &= (t+1)(\cos t) e_1 + (t+1)(\sin t) e_2, \quad t \in [0, 2\pi] \\ r_2(t) &= (e^t \cos t) e_1 + (e^t \sin t) e_2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il prossimo esempio, che non è in forma polare, mostra come l'irregolarità di una curva non possa essere “scovata” semplicemente guardando la sua espressione analitica.

Esempio 2.7. *Si consideri la curva piana definita da $r(t) = \cos^3 t e_1 + \sin^3 t e_2$, $t \in [0, 2\pi]$. Ovviamente, $r \in C^\infty[0, 2\pi]$. Il sostegno di r è rappresentato in Figura 2.3. Si vedono delle “cuspidi” per $t \in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ (ricordiamo che quello*

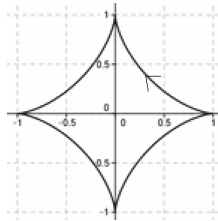


Figura 2.3: Una curva irregolare.

che succede agli estremi non conta). Calcolando $r'(t)$ si scopre che questi sono gli istanti dove $r'(t) = 0$, dove cioè “il punto mobile si ferma e fa un’inversione di marcia”.

Diremo che una curva $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è **regolare a tratti** se l’intervallo I può essere suddiviso in un numero finito di intervalli dove r è regolare. La curva dell’Esempio 2.7 è regolare a tratti. Proviamo ad analizzarla con maggiore precisione.

Esercizio 2.8. *Per la curva r dell’Esempio 2.7 si ha:*

$$r'(t) = x'(t)e_1 + y'(t)e_2 \quad \text{con} \quad x'(t) = \quad \quad \quad y'(t) = \quad \quad \quad .$$

Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ si ha $r'(t) = 0$ per $t \in \{ \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \}$. In tali istanti t_0 risulta, rispettivamente:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x'(t)}{y'(t)} = \quad , \quad , \quad , \quad , \quad .$$

La direzione limite del vettore tangente $r'(t)$ è allora

orizzontale, $\quad , \quad , \quad , \quad , \quad$.

Si osservi che il verso su tali direzioni cambia tra limite destro e sinistro.

Per le derivate delle curve valgono alcune (ovvie) regole di derivazione:

$$(r_1 + r_2)'(t) = \quad \quad \quad \forall r_1, r_2 \text{ derivabili.}$$

$$(\alpha r(t))' = \quad \quad \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, r \text{ derivabile.}$$

$$(r(\phi(t)))' = \phi'(t) r'(\phi(t)) \quad \forall \phi: [c, d] \rightarrow [a, b], r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ derivabili.} \quad (2.4)$$

$$(r_1(t) \cdot r_2(t))' = \quad \quad \quad \forall r_1, r_2 \text{ derivabili.} \quad (2.5)$$

$$(r_1(t) \wedge r_2(t))' = \quad \quad \quad \forall r_1, r_2 \text{ derivabili.} \quad (2.6)$$

Ragioniamo dimensionalmente sulle regole qui sopra. Le prime due riguardano derivate di curve. Nella (2.5) abbiamo derivato una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. La (2.4) descrive una riparametrizzazione; si vede che le due derivate hanno lo stesso verso se e solo se $\phi'(t) > 0$, cioè se ϕ è crescente. Nella (2.6) abbiamo derivato una funzione vettoriale: per il prodotto vettoriale l'ambito naturale sarebbero curve $r_1, r_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ma, immergendo $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, possiamo anche accettare che $r_1, r_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

2.3 Lunghezza di una curva, integrali di linea

Intuitivamente, la lunghezza di una curva (che è poi la lunghezza del suo sostegno nel caso in cui sia semplice e che si chiama anche lunghezza dell'arco di curva) è la distanza che percorre il punto mobile. Se prendiamo la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ per $x \in (0, 1)$ è facile convincersi che la lunghezza del suo grafico è infinita. Se poi consideriamo curve irregolari, allora lo scenario comprende anche altre patologie quali i “fiocchi di neve”. Non volendo addentrarci in tali meandri, ci limiteremo a considerare curve regolari, o almeno regolari a tratti.

Definizione 2.9. Sia $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti. La sua lunghezza è data da

$$\int_I |r'(t)| dt.$$

Diamo un paio di “giustificazioni” fisiche e analitiche di questa definizione. Da un punto di vista fisico, la Definizione 2.9 dice che lo spostamento è l'integrale della velocità, una proprietà elementare ben nota. Se poi prendiamo $I = [a, b]$ e, anziché integrare su tutto $[a, b]$, integriamo su $[a, t]$ con $t \in (a, b]$, applicando la Definizione 2.9 possiamo dire che

$$s(t) = \int_a^t |r'(\tau)| d\tau \quad (2.7)$$

è la “lunghezza istantanea” percorsa fino all'istante t : calcolando $s'(t) = |r'(t)|$, ci accorgiamo che s' è la velocità scalare. Questo giustifica fisicamente la Definizione 2.9. La quantità $s(t)$ in (2.7) viene chiamata *ascissa curvilinea*.

Da un punto di vista analitico, possiamo pensare di approssimare il sostegno di r con una spezzata poligonale. Suddividiamo l'intervallo temporale $[a, b]$ in n sottointervalli di ampiezza $\frac{b-a}{n}$ e consideriamo i punti dello spazio

$$r(a), \quad r\left(a + \frac{1}{n}(b-a)\right), \quad \dots, \quad r\left(a + \frac{n-1}{n}(b-a)\right), \quad r(b).$$

Collegando questi punti, otteniamo una spezzata poligonale, si veda la Figura 2.4. Osserviamo che i punti sono temporalmente equidistanti ma potrebbero



Figura 2.4: Spezzata poligonale che approssima una curva.

non esserlo spazialmente, si pensi al caso di una velocità scalare variabile. Possiamo facilmente calcolare la lunghezza di questa poligonale:

$$\sum_{k=1}^n \left| r\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - r\left(a + \frac{k-1}{n}(b-a)\right) \right|.$$

Accettando la validità di una versione del Teorema di Lagrange nel caso delle curve, $|r(t_2) - r(t_1)| \approx |r'(\tau)|(t_2 - t_1)$ per qualche $\tau \in (t_1, t_2)$, la lunghezza della poligonale diventa

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n |r'(\tau_k)| \quad \tau_k \in \left(a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Dato che questa è una somma integrale, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la formula della Definizione 2.9.

Esercizio 2.10. *Mostrare che la lunghezza della circonferenza di raggio 1 è pari a 2π . Calcolare la lunghezza della curva il cui sostegno è rappresentato in Figura 2.3.*

Nel caso del grafico di una funzione, dalla Definizione 2.9 ricaviamo il

Corollario 2.11. *Sia $f \in C^1[a, b]$. La lunghezza del grafico di f è data da*

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Da un punto di vista geometrico, possiamo vedere $\int_I |r'(t)| dt$ come l'area di una superficie di altezza 1 e avente come base il sostegno. Chiediamoci cosa succede se, anziché avere altezza costante, la superficie ha altezza variabile. Per curve piane il problema si può rappresentare come in Figura 2.5: voglia-

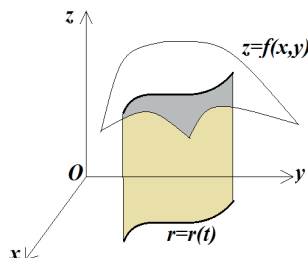


Figura 2.5: Interpretazione geometrica dell'integrale di linea.

mo calcolare l'area della superficie verticale che si appoggia sul piano $z = 0$ (pavimento) e si innalza fino a $z = f(x, y) \geq 0$ (soffitto). Abbiamo qui dato un anticipo di nozioni che vedremo in dettaglio nel Capitolo 3.

Definizione 2.12. *Sia γ il sostegno di una curva regolare $r = r(t)$, $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto contenente γ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dice **integrale di linea** di f lungo γ l'integrale*

$$\int_{\gamma} f = \int_I f(r(t)) |r'(t)| dt.$$

Osserviamo che se $f \equiv 1$ (soffitto di altezza costante), ritroviamo la lunghezza di una linea. Osserviamo anche che il valore di $\int_{\gamma} f$ non dipende dalla parametrizzazione considerata né dal verso di percorrenza di γ : di fatto, si tratta solo di un cambio di variabile.

Gli integrali di linea hanno importanti applicazioni in fisica. Supponiamo di voler scavare una galleria attraverso una montagna $M \subset \mathbb{R}^3$ contenente delle zone di densità di massa variabile $f = f(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in M$. Per calcolare la massa del materiale rimosso durante la trivellazione lungo una curva regolare $r : [a, b] \rightarrow M$ si deve calcolare

$$m = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt.$$

È chiaro che se la densità fosse costante, $f(x, y, z) \equiv d$, la massa totale sarebbe $d \int_a^b |r'(t)| dt$ e cioè la densità per la lunghezza della curva.

Un problema analogo è quello di determinare la massa di un filo pesante di densità variabile. Supponiamo che un filo in $\mathbb{R}^3$ abbia una densità di massa $\rho = \rho(r(t))$ dove $r(t)$ è una curva regolare che ha per sostegno la posizione del filo. Allora la sua massa totale sarà

$$m = \int_a^b \rho(r(t)) |r'(t)| dt$$

dove $[a, b]$ è l'intervallo di definizione di r . Di nuovo, se la densità del filo fosse costante, $\rho \equiv d$, la massa si otterrebbe moltiplicando la densità per la lunghezza.

Il baricentro è una media pesata. Le coordinate (x_b, y_b, z_b) del baricentro del filo sono quindi date da

$$x_b = \frac{1}{m} \int_a^b x(t) \rho(r(t)) |r'(t)| dt, \quad y_b = \frac{1}{m} \int_a^b y(t) \rho(r(t)) |r'(t)| dt,$$

$$z_b = \frac{1}{m} \int_a^b z(t) \rho(r(t)) |r'(t)| dt.$$

Il lettore può facilmente ricavare le formule nel caso in cui la densità sia costante, $\rho \equiv d$: in tal caso, si vede bene come il baricentro sia una media pesata.

Infine, supponiamo di voler calcolare il momento di inerzia I del filo qui sopra descritto rispetto a un asse fissato. Detta ancora $r = r(t)$ ($t \in J$) una curva regolare avente come sostegno il filo stesso e detta $\delta = \delta(r(t))$ la distanza dal punto del sostegno all'asse, il momento di inerzia si trova calcolando l'integrale

$$I = \int_J \delta(r(t))^2 \rho(r(t)) |r'(t)| dt.$$

Il lettore può facilmente ricavare la formula semplificata nel caso in cui la densità sia costante, $\rho \equiv d$.

2.4 Curvatura e torsione

Abbiamo ripetutamente interpretato le curve da un punto di vista cinematico. Per potere proseguire in questa interpretazione e definire anche un *vettore accelerazione* supporremo qui che $r \in C^2[a, b]$. Come vedremo, una maggiore regolarità consentirà anche di caratterizzare le curve dal punto di vista della loro *geometria differenziale*.

Data una curva regolare $r \in C^2[a, b]$ definiamo dunque il vettore accelerazione come $r''(t)$. Così come il vettore velocità $r'(t)$ indica la direzione (rettilinea) di spostamento istantaneo, la coppia $\{r'(t), r''(t)\}$ caratterizza il piano che

localmente tende a contenere il moto. Vediamo di rendere questa caratterizzazione più rigorosa. Cominciamo a osservare che se $u = u(t)$ è un versore per ogni $t \in [a, b]$, derivando l'identità $|u(t)|^2 = 1$ si ottiene $u(t) \cdot u'(t) = 0$ e cioè

$$|u(t)| = 1 \quad \forall t \in [a, b] \implies u'(t) \perp u(t) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.8)$$

Data una curva regolare $r = r(t)$ di classe C^2 , prendiamo in esame il suo versore tangente (2.2); per la (2.8) risulta

$$T'(t) \perp T(t).$$

Se risulta $T'(t) \neq 0$, allora la coppia $\{T(t), T'(t)\}$ definisce un piano vettoriale che, applicato al punto $r(t)$, fornisce un piano affine contenente localmente il moto. Se invece $T'(t) = 0$ (il vettore nullo è perpendicolare a tutti i vettori), la situazione è più delicata. Se fosse $T'(t) = 0$ su un intervallo di tempo, vorrebbe dire che in quell'intervallo $T(t)$ è costante: in particolare, sarebbe costante la sua direzione e quindi il moto sarebbe *rettilineo* e, ovviamente, non avrebbe senso parlare di piano contenente il moto. Se invece $T'(t) = 0$ in un solo istante, allora in quell'istante è come se il punto mobile fosse “indeciso” su quale piano andare tra tutti quelli che contengono la direzione $T(t)$.

Quando $T'(t) \neq 0$, possiamo definire un nuovo versore, detto **versore normale principale**:

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}. \quad (2.9)$$

Se la curva $r(t)$ vive nello spazio $\mathbb{R}^3$, il versore tangente $T(t)$ ammette infinite direzioni ortogonali che formano un piano perpendicolare a T . Il versore normale principale rappresenta una di queste direzioni: come vedremo, è quella più importante dato che il piano generato da $\{T(t), N(t)\}$ coincide con il piano generato da $\{r'(t), r''(t)\}$.

Introduciamo anche la **curvatura** della curva $r(t)$, e cioè la quantità scalare definita da

$$k(t) = \frac{|T'(t)|}{v(t)} = \frac{|T'(t)|}{|r'(t)|} \quad (2.10)$$

dove $v(t)$ è la velocità scalare definita in (2.1). Inoltre, chiameremo **raggio di curvatura** di $r(t)$ la quantità

$$R(t) = \frac{1}{k(t)}.$$

I nomi di queste quantità danno un'idea di quello che rappresentano, vediamo però di essere più precisi. Intanto, se fosse $T'(t) = 0$ su un intervallo (moto rettilineo), avremmo $k(t) = 0$ e $R(t) = +\infty$. Cioè, per un moto rettilineo non c'è curvatura e il raggio di curvatura è infinito: cerchiamo di capire cosa rappresenta quest'ultimo.

Esercizio 2.13. Calcolare curvatura e raggio di curvatura della circonferenza di raggio R . Posto $x(t) = R \cos t$, $y(t) = R \sin t$, ($0 \leq t \leq 2\pi$), risulta

$$T(t) = \begin{matrix} e_1 + & e_2, \end{matrix} \quad T'(t) = \begin{matrix} e_1 + & e_2 \end{matrix}$$

e quindi la curvatura è $k(t) = \quad$ e il raggio di curvatura è $R(t) = \quad$.

Esempio 2.14. Si consideri la parabola $y = x^2$ in forma parametrica: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, ($t \in \mathbb{R}$). Risulta $x'(t) = 1$ e $y'(t) = 2t$ e quindi

$$v(t) = \sqrt{1+4t^2}, \quad T(t) = \frac{e_1 + 2te_2}{\sqrt{1+4t^2}}, \quad T'(t) = \frac{-4te_1 + 2e_2}{(1+4t^2)^{3/2}}, \quad |T'(t)| = \frac{2}{1+4t^2},$$

da cui,

$$k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}, \quad R(t) = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}. \quad (2.11)$$

Vediamo subito che il raggio di curvatura è minimo nel vertice della parabola e cresce monotonamente allontanandosi dal vertice fino a tendere a $+\infty$ quando la parabola “tende a diventare piatta”. Nel vertice, il raggio di curvatura vale $R(0) = \frac{1}{2}$ che è il raggio della circonferenza di equazione

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \implies y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x^2},$$

che ha raggio massimo tra le circonferenze tangenti alla parabola nel vertice e tutte contenute all'interno della parabola, si veda la circonferenza rossa in Figura 2.6. Lo stesso avviene negli altri punti della parabola, con il raggio di curvatura $R(t)$ che tende ad aumentare quando ci si allontana dal vertice.

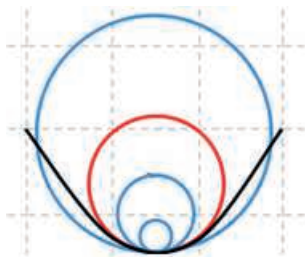


Figura 2.6: Cerchio di raggio massimo, tangente e interno alla parabola.

Esercizio 2.15. Sia $f \in C^2[a, b]$. Calcolare la curvatura del grafico di f .

Posto $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$, risulta

$$T(t) = \begin{matrix} e_1 + & e_2, \end{matrix} \quad T'(t) = \begin{matrix} e_1 + & e_2 \end{matrix}$$

e quindi

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Ripartiamo adesso dalla (2.2) e, calcolando la derivata di un prodotto, otteniamo

$$r''(t)=[r'(t)]'=[v(t)T(t)]'=v'(t)T(t)+v(t)T'(t)=v'(t)T(t)+v(t)^2k(t)N(t) \quad (2.12)$$

dove abbiamo sfruttato le (2.9)-(2.10). La (2.12) mostra che $r''(t)$ appartiene al piano generato da $\{T(t), N(t)\}$ e, dato che $r'(t)$ è proporzionale a $T(t)$ (si veda la (2.2)), il piano generato da $\{r'(t), r''(t)\}$ coincide con quello generato da $\{T(t), N(t)\}$. La (2.12) dice che, nel caso in cui $k(t) = 0$, l'accelerazione non ha componente normale: questo già lo sappiamo dato che $k(t) = 0$ descrive un moto localmente rettilineo e, in tal caso, non è nemmeno definito il vettore $N(t)$. Se invece fosse $v'(t) = 0$ (velocità scalare costante), allora l'accelerazione non avrebbe componente tangenziale: questo è il caso del moto circolare uniforme. Nell'Esempio 2.1 si ha

$$r(t) = \cos t e_1 + \sin t e_2, \quad r'(t) = -\sin t e_1 + \cos t e_2, \quad r''(t) = -\cos t e_1 - \sin t e_2$$

e quindi $v(t) = 1$, $v'(t) = 0$ e $r''(t) \perp r'(t)$.

Osserviamo anche che, per la (2.12), risulta

$$r'(t) \wedge r''(t) = [v(t)T(t)] \wedge [v'(t)T(t) + v(t)^2k(t)N(t)] = v(t)^3k(t)[T(t) \wedge N(t)]$$

e, prendendo le norme dei vettori, otteniamo una formula alternativa alla (2.10) per il calcolo della curvatura

$$k(t) = \frac{|r'(t) \wedge r''(t)|}{v(t)^3}. \quad (2.13)$$

La (2.13) ribadisce che la curvatura è nulla in caso di moti localmente rettilinei (quando r'' è proporzionale a r').

Esercizio 2.16. *Per ognuna delle tre coniche (parabola, ellisse, iperbole)*

$$y = x^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0), \quad xy = 1 \quad (x, y > 0),$$

determinare i punti di curvatura massima e minima.

Le equazioni parametriche delle tre curve sono, rispettivamente,

$$r_1(t) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad r_2(t) \begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$r_3(t) \begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases} \quad (t > 0).$$

Le curvature sono, rispettivamente (per la parabola, si veda la (2.11)):

$$k_1(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}, \quad k_2(t) = \quad , \quad k_3(t) = \quad .$$

I loro massimi e minimi vengono raggiunti, rispettivamente, per

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right. \text{ per } t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right. .$$

Commentare geometricamente i risultati.

Esercizio 2.17. Determinare i punti di curvatura massima e minima della curva considerata nell'Esempio 2.7. Commentare geometricamente i risultati.

La curvatura serve a misurare quanto una determinata curva si discosta da un moto rettilineo. Vorremmo adesso studiare quanto una curva si discosta da un moto piano. All'uopo è utile avere maggiore regolarità: supporremo che $r \in C^3[a, b]$ e definiamo il **vettore binormale**:

$$B(t) = T(t) \wedge N(t). \quad (2.14)$$

Questo vettore è ben definito per ogni curva regolare con moto non rettilineo; infatti in tal caso, $T(t)$ è definito dalla (2.2) mentre $N(t)$ è definito dalla (2.9). Se la curva non fosse regolare o se avesse moto rettilineo, non avrebbe senso chiedersi quanto il suo moto si discosti da un moto piano.

La terna di vettori $\{T, N, B\}$ viene detta **terna intrinseca** della curva r . Per le ben note proprietà del prodotto vettoriale, abbiamo che questa terna forma una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e che valgono anche $N = B \wedge T$ e $T = N \wedge B$. La terna intrinseca è variabile nel tempo ed è il sistema di riferimento naturale della curva. Geometricamente, $T(t)$ rappresenta la migliore approssimazione rettilinea di $r(t)$, il piano generato da $\{T(t), N(t)\}$ è il piano che meglio contiene il moto e viene chiamato **piano osculatore**. Il piano generato da $\{N(t), B(t)\}$ viene attraversato perpendicolarmente dalla curva e viene chiamato **piano normale**. Infine, il piano generato da $\{T(t), B(t)\}$ è quello che viene "accarezzato" dalla curva $r(t)$ e viene chiamato **piano rettificante** o, con un abuso di linguaggio, piano tangente. Questi tre piani, che si intersecano nel punto mobile $r(t)$, sono tra di loro perpendicolari, avendo vettori normali perpendicolari tra loro: il piano osculatore è ortogonale a $B(t)$, il piano normale è ortogonale a $T(t)$, il piano rettificante è ortogonale a $N(t)$.

Per vedere come varia la terna intrinseca, dobbiamo valutare le derivate dei tre vettori T, N, B . Dato che $\{T, N, B\}$ genera lo spazio $\mathbb{R}^3$, le loro derivate si potranno esprimere come combinazioni lineari dei vettori stessi. Osserviamo dapprima che se la curva r è piana, il vettore $B(t)$ e il piano osculatore sono costanti: per questo motivo, chiamiamo **torsione** della curva la quantità

$$\tau(t) = \frac{N(t) \cdot B'(t)}{v(t)} \quad (2.15)$$

che non solo valuta quanto $B(t)$ sia lontano dall'essere costante ma anche quanto tenda a modificarsi l'angolo retto $N \perp B$ facendo variare il solo vettore B . Proprio perché risulta $N \perp B$, si ha $N(t) \cdot B(t) \equiv 0$ e, derivando, $N'(t) \cdot B(t) + N(t) \cdot B'(t) = 0$: di conseguenza, la torsione (2.15) si può anche scrivere come

$$\tau(t) = -\frac{N'(t) \cdot B(t)}{v(t)} \quad (2.16)$$

e, nuovamente, questo misura quanto tenda a modificarsi l'angolo retto $N \perp B$ facendo però ora variare il solo vettore N .

Dalle (2.9)-(2.10) ricaviamo direttamente

$$T'(t) = k(t)v(t) N(t). \quad (2.17)$$

Per calcolare le altre due derivate, osserviamo che dalla (2.8) si deduce $B'(t) \perp B(t)$: questo significa che $B'(t)$ appartiene al piano generato da $\{T(t), N(t)\}$ e che possiamo scrivere

$$B'(t) = [B'(t) \cdot T(t)] T(t) + [B'(t) \cdot N(t)] N(t) \quad (2.18)$$

e, analogamente,

$$N'(t) = [N'(t) \cdot T(t)] T(t) + [N'(t) \cdot B(t)] B(t). \quad (2.19)$$

Osserviamo poi che $B(t) \cdot T(t) \equiv 0$ (sono ortogonali) e che, derivando questa identità, si ottiene

$$B'(t) \cdot T(t) = -B(t) \cdot T'(t) = -k(t)v(t) B(t) \cdot N(t) = 0$$

dove abbiamo usato la (2.17) e l'ortogonalità $B \perp N$. Inserendo questa informazione in (2.18) e usando la (2.15) ricaviamo

$$B'(t) = \tau(t)v(t) N(t). \quad (2.20)$$

Infine, per valutare la derivata di $N(t)$ osserviamo che $N(t) \cdot T(t) \equiv 0$ (sono ortogonali) e che, derivando questa identità, si ottiene

$$N'(t) \cdot T(t) = -N(t) \cdot T'(t) = -k(t)v(t)$$

dove la seconda uguaglianza è ottenuta facendo il prodotto scalare di (2.17) con $N(t)$. Inserendo questa informazione e la (2.16) nella (2.19) otteniamo

$$N'(t) = -k(t)v(t) T(t) - \tau(t)v(t) B(t). \quad (2.21)$$

Se fosse $\tau(t) \equiv 0$ (curva piana), la (2.20) diventerebbe $B'(t) = 0$, la (2.21) diventerebbe $N'(t) = -k(t)v(t)T(t)$, mentre la (2.17) rimarrebbe $T'(t) = k(t)v(t)N(t)$. Le tre derivate (2.17)-(2.20)-(2.21) descrivono come varia la terna intrinseca rispetto al tempo. Inoltre, dicono che le tre quantità scalari

$v(t)$ (velocità scalare), $k(t)$ (curvatura) e $\tau(t)$ (torsione) caratterizzano univocamente una curva regolare $r \in C^3$. Osserviamo che $v(t)$ misura la tendenza che ha $r(t)$ ad allontanarsi da un punto, $k(t)$ misura la tendenza ad allontanarsi da una retta, $\tau(t)$ misura la tendenza ad allontanarsi da un piano.

Le tre equazioni (2.17)-(2.20)-(2.21) prendono il nome di **formule di Frenet** e, nel caso dell'ascissa curvilinea ($t = s$), diventano

$$T'(s) = k(s) N(s), \quad B'(s) = \tau(s) N(s), \quad N'(s) = -k(s) T(s) - \tau(s) B(s).$$

Concludiamo con due formule che permettono di semplificare alcuni calcoli: per ogni $r \in C^3[a, b]$ tale che $r'(t) \wedge r''(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$ (curva regolare mai localmente rettilinea), si ha

$$B(t) = \frac{r'(t) \wedge r''(t)}{|r'(t) \wedge r''(t)|}, \quad \tau(t) = -\frac{r'(t) \wedge r''(t) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \wedge r''(t)|^2}.$$

La prima si verifica facilmente a partire dalle (2.12)-(2.14), la seconda è ben più difficile da provare ma può risultare molto utile.

3 Funzioni reali di più variabili

3.1 Motivazione e insiemi di definizione

Sarà sicuramente capitato al lettore di vedere cartine geografiche (piane!) con informazioni su una terza grandezza quale, ad esempio, l'altitudine, la temperatura o la pressione, si veda la Figura 3.1. Sono casi particolari di rap-

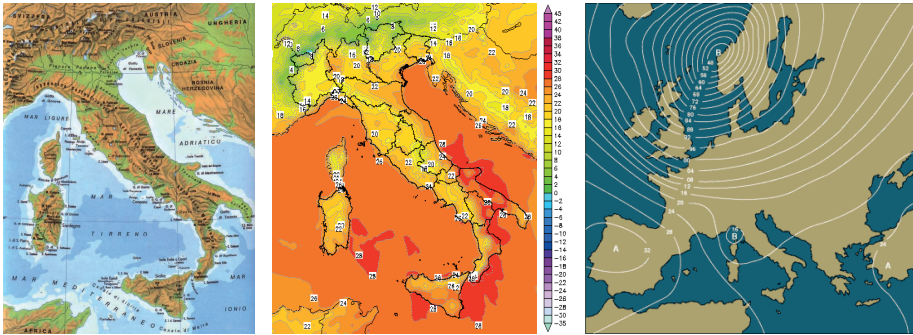


Figura 3.1: Rilievi e temperature in Italia, pressione in Europa.

presentazione di funzioni di due variabili, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; a ogni coppia (x, y) in una regione del piano viene associato un valore $f(x, y)$. Le isobare nella terza cartina sono dette **curve di livello** di f e rappresentano insiemi dove la pressione f è costante. Possiamo rappresentare il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ come in Figura 3.2: i colori vengono abbinati alle quote.

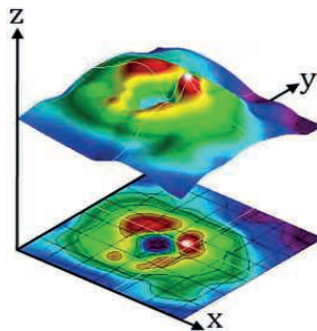


Figura 3.2: Grafico e curve di livello di una funzione di due variabili.

In ambito scientifico ed economico, le funzioni di più variabili giocano un ruolo importante. La resa di un carburante, per esempio, può variare a seconda

della quantità percentuale dei suoi componenti. Il costo di produzione di un prodotto dipende dal costo della mano d'opera e della materia prima. Uno dei problemi più interessanti è quello di **ottimizzare** una funzione e cioè trovare la coppia (x, y) che massimizza una resa o minimizza dei costi. Le funzioni di due variabili sono rappresentabili come superfici nello spazio tridimensionale $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (vedi ancora Figura 3.2) e sono descritte da una relazione del tipo $z = f(x, y)$.

Anche funzioni di n variabili $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ hanno un grande interesse: il costo di produzione di un prodotto può non dipendere solo da due variabili. Tuttavia, il caso $n = 2$ gode del vantaggio di potere essere “quasi” rappresentato graficamente (Figura 3.2) e di descrivere il mondo 3-dimensionale nel quale viviamo, vedi le cartine in Figura 3.1. Inoltre, mentre il passaggio da $n = 1$ a $n = 2$ richiede alcune precauzioni, il formalismo che vedremo per $n = 2$ si adatta senza alcuna fatica al caso $n \geq 3$. Nel seguito studieremo principalmente il caso $n = 2$ e, con alcune osservazioni ben mirate, spiegheremo come estendere i risultati al caso $n \geq 3$.

In questo capitolo vogliamo fornire gli strumenti per studiare queste funzioni. Il primo passo è sicuramente quello di caratterizzare il loro insieme di definizione. Mentre nel caso $n = 1$ l'insieme di definizione è un intervallo o l'unione di intervalli, nel caso $n = 2$ l'insieme di definizione può avere delle forme molto disparate: un conto è cercare sottoinsiemi di una retta, un conto è cercarli del piano.

Esempio 3.1. *Determiniamo l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x^2 + 2y^2}.$$

Le condizioni da imporre sono $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ e $x^2 + 2y^2 \neq 0$ e sono rappresentate in Figura 3.3. L'insieme di definizione consiste nel disco unitario (compresa la circonferenza che lo delimita) al quale abbiamo tolto l'origine.

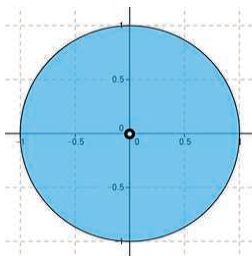


Figura 3.3: Insieme di definizione di una funzione di due variabili.

Per descrivere in modo adeguato il dominio di una funzione di più variabili abbiamo bisogno di alcune definizioni. Dato un punto $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e dato

$r > 0$ indicheremo con $B_r(M)$ il disco centrato in M di raggio r :

$$B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\},$$

vedere Figura 3.4. Diremo anche che $B_r(x_0, y_0)$ è un **intorno** del punto

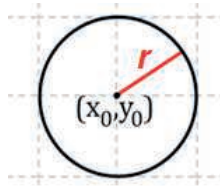


Figura 3.4: Intorno del punto (x_0, y_0) .

(x_0, y_0) : tutti gli intorni del punto si ottengono facendo variare $r > 0$. Indicheremo invece con $B_r^0(x_0, y_0)$ un **intorno bucato** di (x_0, y_0) e cioè

$$B_r^0(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}.$$

Osservazione 3.2. Nel caso n -dimensionale, dato un punto $M(x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, si definisce

$$B_r(M) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 < r^2 \right\}.$$

Infatti, la **distanza Euclidea** si calcola con una generalizzazione del Teorema di Pitagora.

Diamo ora qualche nozione di *topologia*.

Definizione 3.3. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

- Diremo che $M \in \Omega$ è un **punto interno** a Ω se esiste $r > 0$ tale che $B_r(M) \subset \Omega$.
- Diremo che $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ è un **punto esterno** a Ω se è interno a $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.
- Diremo che $M \in \mathbb{R}^2$ è un **punto di frontiera** di Ω se non è né interno né esterno a Ω . Chiameremo **frontiera** di Ω , e la indicheremo con $\partial\Omega$, l'insieme dei punti di frontiera di Ω .

In sostanza, un punto interno è un punto che sta nell'insieme con tutto un suo intorno, un punto esterno è un punto che sta fuori dall'insieme con tutto un suo intorno, mentre un punto è di frontiera se in ogni suo intorno cadono sia punti dell'insieme che punti del complementare.

Esempio 3.4. Per l'insieme rappresentato in Figura 3.3:

- i punti (x, y) con $0 < x^2 + y^2 < 1$ sono punti interni;
- i punti (x, y) con $x^2 + y^2 > 1$ sono punti esterni;
- l'origine e i punti (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di frontiera.

Con le proprietà dei punti possiamo classificare topologicamente gli insiemi.

Definizione 3.5. *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice **aperto** se tutti i suoi punti sono interni. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice **chiuso** se $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ è aperto.*

Per assimilare questa definizione invitiamo il lettore a fare degli esempi. Inoltre, lasciamo al lettore la verifica delle seguenti affermazioni:

- * un insieme è aperto se e solo se non contiene nessun punto di frontiera;
- * un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera;
- * alcuni insiemi non sono né aperti, né chiusi, vedi Figura 3.3;
- * gli unici insiemi sia aperti che chiusi sono $\emptyset$ (vuoto) e $\mathbb{R}^2$ (piano);
- * un insieme è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso.

Nel seguito saranno importanti anche altre due proprietà degli insiemi.

Definizione 3.6. *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice **limitato** se esiste $r > 0$ tale che $\Omega \subset B_r(0)$. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice **connesso**¹ se per ogni coppia di punti in Ω esiste una curva continua interamente contenuta in Ω che li congiunga.*

Esercizio 3.7. *Si consideri la funzione*

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}\sqrt{1-xy}}.$$

Il suo insieme di definizione è rappresentato in Figura 3.5 dove le crocette

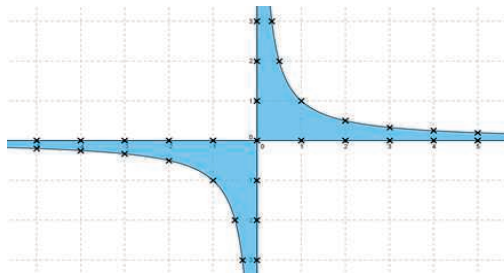


Figura 3.5: Insieme di definizione.

indicano un “filo spinato” e cioè che le linee sono da escludere. Questo insieme è aperto, illimitato, sconnesso. Invece, l’insieme di definizione di $g(x, y) = \sqrt{xy}\sqrt{1-xy}$ è...

aperto?

chiuso?

limitato?

connesso?

Osservazione 3.8. *Tutte le nozioni di topologia viste in questo paragrafo si estendono senza difficoltà alle dimensioni $n \geq 3$.*

¹Lo chiameremo connesso anche se sarebbe più giusto chiamarlo **connesso per archi**.

Gli intornoi sono utili per definire i punti di estremo relativo.

Definizione 3.9. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ è punto di **massimo relativo** per f se esiste $r > 0$ tale che $f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$ per ogni $(x, y) \in B_r(\bar{x}, \bar{y}) \cap \Omega$; diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ è punto di **minimo relativo** per f se vale la disuguaglianza opposta. Diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ è punto di **massimo assoluto** per f se $f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$ per ogni $(x, y) \in \Omega$; diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ è punto di **minimo assoluto** per f se vale la disuguaglianza opposta.

Un punto di estremo è un punto di massimo o di minimo.

3.2 Limiti e continuità

Sia $\ell \in \mathbb{R}$, diremo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \ell \quad (3.1)$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } (x, y) \in B_\delta^0(x_0, y_0) \implies |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

Questa definizione coincide con quella di limite nel caso $n = 1$; l'unica differenza è la dimensione dell'intorno bucato $B_\delta^0(x_0, y_0)$ che, in dimensione $n \geq 2$ consente al punto (x, y) di “avvicinarsi in infiniti modi diversi” al punto (x_0, y_0) . Ricordiamo infatti che, in dimensione $n = 1$, si parla di “limite destro” e “limite sinistro” proprio per indicare che ci sono solo due modi continui di raggiungere il punto limite. In dimensione maggiore $n \geq 2$ non solo ci sono infinite direzioni rettilinee (lungo le rette) ma ci si può avvicinare al punto anche lungo qualsiasi curva.

Esempio 3.10. Si considerino le funzioni

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0), \quad g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Su ogni retta del tipo $y = mx$, risulta

$$f(x, mx) = \frac{m}{1 + m^2} \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Osserviamo che $g(x, 0) \equiv 0$, che $g(0, y) \equiv 0$ e che, su ogni retta del tipo $y = mx$ ($m \neq 0$), risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0;$$

tuttavia, non possiamo concludere che il limite di g esista e sia nullo. Infatti, se invece di una retta prendiamo la parabola $y = x^2$, troviamo $g(x, x^2) = \frac{1}{2}$. La Figura 3.6 illustra quanto trovato: il valore di $g(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ dipende dal cammino che si segue; lungo le rette si trova 0, lungo la parabola si trova $\frac{1}{2}$. Pertanto, il limite non esiste. Il lettore potrà poi vedere quanto vale la g su altre parabole $y = \gamma x^2$.

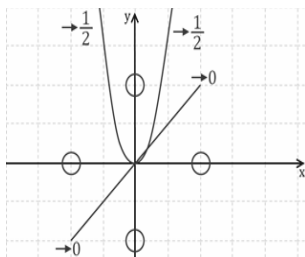


Figura 3.6: Quote di g su diversi cammini.

Questo esempio mostra come non basti studiare le direzioni rettilinee di avvicinamento al punto limite. Il problema è che, se anche valutassimo il limite lungo infinite curve e trovassimo sempre lo stesso risultato, potrebbe sempre esserci una curva che non abbiamo considerato lungo la quale il limite verrebbe diverso. Come fare per individuare queste curve? Il trucco più efficace, almeno nel caso piano $n = 2$, è quello di passare in **coordinate polari** come ora illustriamo. Supponiamo di dovere dimostrare (3.1): poniamo $x = x_0 + \rho \cos \vartheta$ e $y = y_0 + \rho \sin \vartheta$ in modo tale che

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \iff \rho \rightarrow 0$$

anche se fosse $\vartheta = \vartheta(\rho)$. Pertanto, il limite (3.1) si riscrive

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) = \ell. \quad (3.2)$$

Il vantaggio rispetto a (3.1) è che adesso facciamo “muovere” la sola variabile ρ e (3.2) ci dice che il limite esiste e vale ℓ , anche se fosse $\vartheta = \vartheta(\rho)$, cioè con **direzione di avvicinamento variabile**. Riprendiamo la funzione g dell’Esempio 3.10: dopo avere semplificato si trova

$$g(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) = \frac{\rho \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\rho^2 \cos^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta}$$

e si osserva che, facendo tendere $\rho \rightarrow 0$, il comportamento dipende da $\vartheta = \vartheta(\rho)$; quindi il limite non esiste (per vederlo, basta prendere $\vartheta = \arcsin \rho$).

Diremo che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = +\infty$$

se

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } (x, y) \in B_\delta^0(x_0, y_0) \implies f(x, y) > M.$$

Analoga definizione si ha nel caso di $-\infty$ sostituendo l’ultima disuguaglianza con $f(x, y) < -M$. Eviteremo invece di parlare di limite per $(x, y) \rightarrow \infty$ dato che ci sono “tanti modi di andare all’infinito”.

Il concetto di limite consente di definire la continuità di una funzione di più variabili. Diremo che f è **continua** in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Una funzione si dice poi continua in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se è continua in ogni punto di Ω : scriveremo allora $f \in C^0(\Omega)$. Concludiamo con le proprietà delle funzioni continue su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.11. (Proprietà delle funzioni continue)

- **(Permanenza del segno)** Se f è continua in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $f(x_0, y_0) > 0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$.
- **(Teorema di Weierstrass)** Se $f \in C^0(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso e limitato, allora f assume massimo e minimo assoluto in Ω .
- **(Teorema degli zeri)** Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è connesso, se $f \in C^0(\Omega)$ e se esistono $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ tali che $f(x_0, y_0) \cdot f(x_1, y_1) < 0$, allora esiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ tale che $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Non diamo la dimostrazione di questi risultati ma invitiamo il lettore a confrontarli con gli omologhi in dimensione $n = 1$.

3.3 Derivabilità e differenziabilità

La parola “derivata” fa venire in mente una pendenza o un rapporto incrementale. Trattando con funzioni di più variabili, non è però immediato stabilire cosa sia una pendenza. Chi cammina sul fianco di una montagna può salire o scendere, ma anche rimanere ad altitudine costante; questo dipende dalla direzione che prende. Chi osserva da un elicottero vedrà soltanto la direzione presa (nord-sud-est-ovest) ma non saprà valutare la variazione di altitudine del sentiero di colui che cammina.

Per le funzioni di più variabili esistono tante derivate, tante pendenze, tanti rapporti incrementali. Ma qualche derivata è più importante delle altre.

Definizione 3.12. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **derivabile** in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ se esistono finiti i due limiti

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0};$$

in tal caso, i numeri $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ si chiamano **derivate parziali** di f in (x_0, y_0) .

Questa definizione non dovrebbe sorprendere: una derivata parziale (per esempio, rispetto a x) è il limite di un rapporto incrementale con incremento parziale. Geometricamente, le derivate parziali rappresentano le pendenze che si hanno sul fianco della montagna quando si prendono le direzioni degli assi

orientati. Se $f_x(x_0, y_0) > 0$ significa che, muovendosi nella direzione delle x crescenti, si va in salita. Altre notazioni utilizzate per indicare la derivata rispetto a x sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \partial_x f, \quad D_x f$$

e analogamente per la derivata rispetto a y .

Molto spesso, per calcolare una derivata parziale si può evitare di usare la definizione: per derivare rispetto a x basta considerare y come una costante e derivare la funzione come se dipendesse dalla sola variabile x .

Esempio 3.13. Sia $f(x, y) = x^2 e^y$, allora $f_x(x, y) = 2xe^y$ e $f_y(x, y) = x^2 e^y$.

Il vettore formato dalle derivate parziali prende il nome di **gradiente** della funzione e lo indichiamo con il simbolo ∇ (nabla):

$$\text{grad} f(x, y) = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Osservazione 3.14. Una funzione di n variabili $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ha n derivate parziali $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ e il suo gradiente ha n componenti:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_{x_n}(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Il gradiente di una funzione è dunque un vettore che ha la stessa dimensione dello spazio ambiente. Valgono, con ovvie modifiche, le regole di calcolo delle derivate monodimensionali:

$$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g, \quad \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g, \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}.$$

Esercizio 3.15. Si consideri la funzione $f(x, y) = \sin(x) \arctan(x + y^2)$; allora

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}.$$

Più avanti sarà utile la formula di derivazione delle funzioni composte. Facendo attenzione alle dimensioni, possiamo comporre una curva con una funzione di più variabili. Sia $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, allora la funzione $t \mapsto f(r(t))$ è una funzione da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ e

$$\frac{d}{dt}(f(r(t))) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Inoltre, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili, risulta $\nabla[g(f(x))] = g'(f(x))\nabla f(x)$.

La derivabilità per una funzione di più variabili non gioca lo stesso ruolo che per una funzione di una sola variabile; in estrema sintesi, possiamo dire che si tratta di una proprietà molto debole. Una prima fondamentale osservazione è che la **derivabilità non implica la continuità**.

Esempio 3.16. *Si consideri la funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

Per quanto visto nell'Esempio 3.10, questa funzione non è continua in $(0, 0)$. Tuttavia, dato che $f(x, 0) = 0$ per ogni x e $f(0, y) = 0$ per ogni y , f risulta derivabile in $(0, 0)$ e $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Questa osservazione ci deve fare ripensare al significato di derivabilità: in dimensione $n = 1$, la derivabilità si traduce geometricamente nell'esistenza della retta tangente al grafico. In dimensione $n = 2$ sarebbe utile avere una nozione che garantisca l'esistenza di un piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$. Ma un piano è formato da infinite rette e non possono bastare le due rette tangenti che garantiscono la derivabilità. Inoltre, anche ammettendo di riuscire a definire infinite derivate in tutte le direzioni possibili (in modo da avere infinite rette tangenti al grafico), siamo poi sicuri che queste rette giaceranno su uno stesso piano? Infine, stiamo parlando di derivate direzionali avendo in mente delle direzioni che sono rettilinee; ma dato che la continuità coinvolge tutte le direzioni, non solo quelle rettilinee, non possiamo sperare di controllare la continuità neanche dopo che avremo definito le derivate in tutte le direzioni possibili. È necessario fare chiarezza su questi punti essenziali: invitiamo il lettore a rileggere queste poche righe cariche di dubbi dopo che sarà arrivato alla fine del presente paragrafo.

Il primo passo è quello di definire le derivate in altre direzioni: perché limitarsi a studiare le pendenze nelle direzioni parallele agli assi? Non possiamo chiederci quanto vale la pendenza se ci muoviamo, per esempio, in direzione della bisettrice degli assi? Dato che siamo nel piano, possiamo identificare tutte le possibili direzioni con un angolo $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Quest'angolo è associato a un *versore* che indichiamo con

$$v_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} . \quad (3.4)$$

Vogliamo definire la derivata nella direzione di v_ϑ per ogni valore di ϑ .

Definizione 3.17. Sia v_ϑ il versore in (3.4). Chiameremo **derivata direzionale** di f nel punto (x_0, y_0) e nella direzione v_ϑ il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \vartheta, y_0 + t \sin \vartheta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Se tale limite esiste ed è finito diremo che f è derivabile nella direzione v_ϑ .

Le derivate parziali f_x e f_y corrispondono, rispettivamente, a $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Inoltre, si ha: $\frac{\partial f}{\partial v_\pi} = -f_x$ e $\frac{\partial f}{\partial v_{3\pi/2}} = -f_y$. Geometricamente, $\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}(x_0, y_0)$ rappresenta la pendenza istantanea sul grafico di $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) e nella direzione v_ϑ .

Sappiamo che la posizione degli sci su una pista innevata può permetterci sia di acquistare la massima velocità sia di fermarci. Nel primo caso, dobbiamo scegliere la direzione di *massima pendenza*, nel secondo caso la direzione perpendicolare. Tra tutte le derivate direzionali, e cioè tra tutte le pendenze possibili, ci chiediamo come si possa determinare quella massima. Per la risposta generale, dobbiamo pazientare fino alla (3.8); vediamo invece un caso particolare.

Esercizio 3.18. Si consideri la funzione $f(x, y) = x^2 + y$. Per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi)$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}(0, 0)$. Determinare poi la direzione di massima pendenza.

Dato che $f(0, 0) = \quad$, risulta

$$\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t \cos \vartheta)^2 + (t \sin \vartheta) - f(0, 0)}{t} = \quad.$$

La direzione di massima pendenza si ha per $\vartheta = \quad$.

La funzione considerata nell'Esempio 3.16 è derivabile solo nelle direzioni $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ corrispondenti alle derivate parziali. Viene allora spontanea una nuova domanda: se una funzione è derivabile in tutte le direzioni, allora è anche continua? Come già abbiamo anticipato, la risposta è negativa.

Esercizio 3.19. Si consideri la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (3.5)$$

Calcolare tutte le derivate direzionali di g in $(0, 0)$.

$$\frac{\partial g}{\partial v_\vartheta}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \quad = \begin{cases} \quad & \text{se } \vartheta = 0, \pi \\ \quad & \text{se } \vartheta \neq 0, \pi. \end{cases}$$

Pertanto, la funzione g definita in (3.5) è derivabile in tutte le direzioni ma non è continua nell'origine, vedi Esempio 3.10. Come già osservato, il motivo è che la derivabilità viene valutata solo nelle direzioni rettilinee mentre la continuità viene valutata in tutte le direzioni possibili, anche curvilinee. Dobbiamo allora fare un altro passo.

Ripartiamo dall'interpretazione geometrica del piano tangente. Se esistesse tale piano dovrebbe contenere le rette definite dalle derivate parziali. Pertanto, il candidato **piano tangente** ha equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (3.6)$$

L'esistenza di un piano tangente significa che “possiamo appoggiare una tavola di legno sul fianco della montagna e che, in prossimità del punto di contatto, questa tavola bene rappresenta le pendenze della montagna nelle varie direzioni”. Questa considerazione ci porta alla

Definizione 3.20. Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **differenziabile** in (x_0, y_0) se è derivabile e se

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - hf_x(x_0, y_0) - kf_y(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (3.7)$$

La condizione (3.7) si può scrivere in altri modi equivalenti:

* forma vettoriale:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0;$$

* fuori dal limite: per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ risulta

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - hf_x(x_0, y_0) - kf_y(x_0, y_0) = o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right);$$

* coordinate polari: se v_ϑ è come in (3.4), allora per ogni $\vartheta = \vartheta(\rho)$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) - f(x_0, y_0) - \rho \nabla f(x_0, y_0) \cdot v_\vartheta}{\rho} = 0.$$

Ognuna di queste scritte dice che “il grafico della superficie si allontana dal piano tangente con un ordine di infinitesimo superiore a quello della distanza dal punto”. Infatti, la (3.7) si può anche riscrivere come

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Dalla versione in coordinate polari ricaviamo, in particolare, che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) = f(x_0, y_0) \quad \forall \vartheta = \vartheta(\rho)$$

e cioè che f è continua in (x_0, y_0) : risulta così dimostrata l'implicazione

$$f \text{ differenziabile in } (x_0, y_0) \implies f \text{ continua in } (x_0, y_0).$$

Inoltre, prendendo $\vartheta(\rho) \equiv \vartheta$ per qualunque $\vartheta \in [0, 2\pi)$ otteniamo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \rho \cos \vartheta, y_0 + \rho \sin \vartheta) - f(x_0, y_0)}{\rho} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v_\vartheta$$

che, ricordando la Definizione 3.17, si riscrive come

$$\frac{\partial f}{\partial v_\vartheta}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v_\vartheta. \quad (3.8)$$

Questa relazione, che prende il nome di **regola del gradiente**, afferma che se f è differenziabile allora le derivate direzionali si possono calcolare facendo il prodotto scalare tra il gradiente e il versore con la medesima direzione. Ecco allora che riscopriamo l'importanza delle derivate parziali f_x e f_y :

se la funzione è differenziabile, allora le derivate parziali consentono di calcolare tutte le altre derivate direzionali.

In particolare, se f è differenziabile e ∇f è nullo, allora sono nulle tutte le derivate direzionali. Nel caso in cui $|\nabla f| \neq 0$, la (3.8) consente invece di determinare la direzione di massima pendenza, si veda l'Esercizio 3.18: infatti, dobbiamo determinare il massimo della funzione $\vartheta \mapsto f_x \cos \vartheta + f_y \sin \vartheta$. La derivata di questa funzione è $-f_x \sin \vartheta + f_y \cos \vartheta$ e si annulla per

$$\cos \vartheta = \pm \frac{f_x}{|\nabla f|}, \quad \sin \vartheta = \pm \frac{f_y}{|\nabla f|}.$$

Dato che il massimo ha segno positivo, possiamo quindi concludere che

la direzione di massima crescita per f è quella del gradiente ∇f .

Inoltre, la (3.8) mostra che la derivata direzionale è nulla quando $v_\vartheta \perp \nabla f$; dato che la direzione a derivata nulla è quella tangente alla curva di livello, si veda la Figura 3.7, possiamo anche concludere che

il gradiente è perpendicolare alla curva di livello.

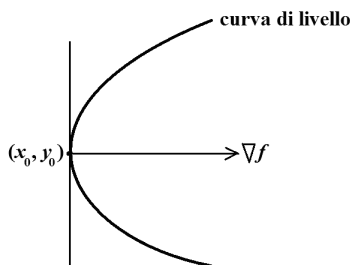


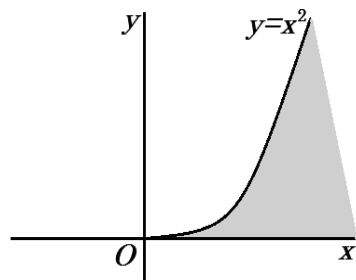
Figura 3.7: Curve di livello e gradiente.

Questo si vede anche usando la (3.3): se supponiamo che la curva di livello si possa parametrizzare con una curva regolare $r = r(t)$, derivando la funzione costante $f(r(t)) = f(x_0, y_0)$, otteniamo $\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 0$ e quindi, di nuovo, il gradiente è perpendicolare alla curva di livello.

La regola del gradiente può anche essere usata al contrario: se non vale, la funzione non è differenziabile. In particolare, se le derivate direzionali non si esprimono come combinazione lineare di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ la (3.8) non vale e la funzione non è differenziabile. Bisogna però stare attenti:

anche se f è continua in un punto, derivabile in tutte le direzioni e vale la (3.8), non è detto che f sia differenziabile.

Sia $f(x, y) = x$ se $x > 0$ e $0 < y < x^2$, $f(x, y) = 0$ altrove. Nella figura a destra la zona grigia rappresenta l'insieme aperto dove $f(x, y) = x$. In $(0, 0)$ la f è continua, derivabile con derivata nulla in tutte le direzioni e quindi vale la (3.8). Per $h > 0$ e $k = h^2/2$ si ha $f(h, k) = h$ e il limite nella (3.7) vale 1; quindi f non è differenziabile in $(0, 0)$.



Se le derivate parziali, oltre ad esistere sono continue nel punto (x_0, y_0) , diremo che la funzione f è di classe C^1 in tale punto: questa è una condizione sufficiente per la differenziabilità. Riassumiamo le implicazioni che abbiamo incontrato in questo paragrafo:

$$f \in C^1 \implies f \text{ differenziabile} \implies \begin{cases} f \in C^0 \\ f \text{ derivabile} \end{cases} \quad (3.9)$$

mentre non c'è nessuna implicazione tra le ultime due proprietà.

Esempio 3.21. *Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione*

$$f^a(x, y) = \begin{cases} |x|^a \log \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se $a \geq 0$, l'insieme di definizione è $\mathbb{R}^2$; se $a < 0$, l'insieme di definizione è $\mathbb{R}^2$ privato delle due semirette $\{x = 0, y > 0\}$ e $\{x = 0, y < 0\}$. Osserviamo che

$$\frac{|x|}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2};$$

pertanto, $\log \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ è limitato e quindi f^a è continua in $(0, 0)$ se e solo se $a > 0$. Affinché f^a sia differenziabile deve essere continua e cioè $a > 0$;

ma allora $x = 0$ è una curva di livello 0 di f^a : otteniamo quindi $f_y^a(0,0) = 0$ per ogni $a > 0$. Inoltre,

$$f_x^a(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^a \log \left(1 + \frac{x}{2|x|} \right)}{x} :$$

se $a \leq 1$ tale limite non esiste e la funzione non può essere differenziabile, si veda (3.9). Se $a > 1$, allora $f_x^a(0,0) = 0$ e f^a è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^a \log \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 ;$$

ma il logaritmo è limitato e quindi f^a è differenziabile se e solo se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^a}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 :$$

questo è vero se e solo se $a > 1$ che è dunque la condizione di differenziabilità.

Concludiamo questo paragrafo con l'estensione della proprietà del valor medio al caso multidimensionale. L'abbiamo lasciata per ultima perchè non è così utile come nel caso $n = 1$.

Teorema 3.22. (Teorema di Lagrange)

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile. Allora per ogni coppia di punti $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$ esiste un punto $\bar{x}$ sul segmento $[x^0, x^1]$ tale che $f(x^1) - f(x^0) = \nabla f(\bar{x}) \cdot (x^1 - x^0)$.

La dimostrazione segue dal Teorema di Lagrange nel caso $n = 1$: si applica alla funzione $t \mapsto f(tx^1 + (1-t)x^0)$ definita per $t \in [0, 1]$ e si usa la (3.3).

3.4 La formula di Taylor

Se una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 possiamo chiederci se le sue derivate parziali siano, a loro volta, derivabili. In tal caso, quante derivate seconde si trovano? Facciamo il calcolo direttamente in $\mathbb{R}^n$: ognuna delle n derivate parziali ha, anche lei, n derivate parziali. Ci sono dunque n^2 derivate parziali seconde che indicheremo nel modo seguente:

$$f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, \dots, n);$$

le derivate seconde vengono poi inserite in una matrice, chiamata **matrice Hessiana**:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} .$$

Alcuni testi indicano con D^2f la matrice Hessiana di f . Chiameremo derivate seconde doppie quelle del tipo $f_{x_i x_i}$ che giacciono sulla diagonale principale di H_f e derivate seconde miste tutte le altre. Dato un sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, indichiamo con $C^2(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che hanno tutte le derivate seconde continue.

Esempio 3.23. *Data la funzione $f(x, y) = x^2 e^y$ si ha $f_x = 2xe^y$, $f_y = x^2 e^y$, $f_{xx} = 2e^y$, $f_{xy} = f_{yx} = 2xe^y$, $f_{yy} = x^2 e^y$. Pertanto, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$*

Osserviamo che $f_{xy} = f_{yx}$; è un caso? Fortunatamente no!

Teorema 3.24. (Teorema di Schwarz)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f \in C^2(\Omega)$; allora $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e cioè la matrice Hessiana H_f è simmetrica.

Questo permette di ridurre il numero di derivate seconde da calcolare da n^2 a $\frac{n(n+1)}{2}$. In particolare, se $n = 2$ ogni funzione di classe C^2 ha 3 derivate seconde. La storia poi prosegue... una funzione si dice di classe C^k se ha tutte le derivate k -esime continue. Vale anche una generalizzazione del Teorema di Schwarz: ad esempio $f_{x_1 x_2 x_2} = f_{x_2 x_1 x_2} = f_{x_2 x_2 x_1}$ e così via. La traccia della matrice Hessiana viene chiamata **Laplaciano** e indicata come

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i} . \quad (3.10)$$

Come nel caso $n = 1$, le derivate seconde servono per determinare la concavità della superficie che rappresenta la funzione. Allo scopo, è di fondamentale importanza il seguente

Teorema 3.25. (Formula di Taylor)

Sia f di classe C^2 in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Allora, per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ si ha

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]. \end{aligned}$$

L'operazione indicata con $\cdot$ è un prodotto scalare mentre l'operazione

$$H_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

è un prodotto matriciale righe per colonne: il risultato è un vettore che va moltiplicato scalarmente con un altro vettore. Scritta per esteso in forma scalare, la formula di Taylor diventa

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&+ \frac{1}{2} \left(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \\
&+ o[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Naturalmente, questa formula ha la sua analoga in dimensione n qualunque. Per darle maggiore somiglianza a quella in dimensione $n = 1$, poniamo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$; la formula di Taylor si scrive allora

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{x}^0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2).$$

Ci sono poi formule di Taylor di ordine qualunque: ogni funzione sufficientemente regolare è approssimabile con un polinomio di grado fissato. Nella formula qui sopra intravediamo i coefficienti binomiali: questo non è un caso, se $n = 2$ il termine di grado k del polinomio di Taylor è

$$\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x_0, y_0) (x - x_0)^j (y - y_0)^{k-j}.$$

Concludiamo osservando che la matrice Hessiana può essere utilizzata per calcolare le derivate seconde in qualunque direzione. Se f è di classe C^2 in $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e se u e v sono due versori, valgono le uguaglianze

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u}(x^0) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(x^0) = H_f(x^0) u \cdot v = H_f(x^0) v \cdot u$$

dove si vede chiaramente una generalizzazione del Teorema di Schwarz.

3.5 Ottimizzazione libera

La formula di Taylor al second'ordine (Teorema 3.25) serve per determinare la posizione della superficie rispetto al suo piano tangente, si veda la (3.6). Posto

$$v = v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

risulta che v è un versore per ogni $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ e che la formula si riscrive come

$$\begin{aligned}
&f(x, y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2} H_f(x_0, y_0) v \cdot v + o(1) \right) [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2].
\end{aligned}$$

Sulla prima riga riconosciamo la differenza tra le funzioni che definiscono la superficie di f e il suo piano tangente in (x_0, y_0) . Se riuscissimo a dare un

segno ai termini della seconda riga, potremmo concludere che la superficie sta sopra (se il segno è positivo) oppure sotto (se il segno è negativo) rispetto al piano tangente. Dato che il segno del membro di destra è, definitivamente per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, quello di $H_f(x_0, y_0)v \cdot v$, dobbiamo cercare delle condizioni che garantiscano che il suo segno non dipenda da v . All'uopo ricordiamo alcune proprietà delle matrici simmetriche.

Sia H una matrice simmetrica $n \times n$; allora H ha n autovalori reali $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ alcuni dei quali possono anche essere coincidenti. Invece, una matrice non simmetrica potrebbe anche avere autovalori complessi. Dato che abbiamo ordinato in modo crescente gli autovalori, vale la stima

$$\lambda_1 \leq Hv \cdot v \leq \lambda_n \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad |v| = 1.$$

Combinando queste disuguaglianze con la continuità del prodotto scalare, deduciamo che $Hv \cdot v$ ha segno costante se e solo se tutti i suoi autovalori hanno lo stesso segno. Se $\lambda_1 > 0$ il segno è positivo e H si dice *definita positiva*, se $\lambda_n < 0$ il segno è negativo e H si dice *definita negativa*. Possiamo riassumere quanto appena visto nel

Teorema 3.26. *Sia f di classe C^2 in un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $H_f(x^0)$ la sua matrice Hessiana. Se tutti gli autovalori di $H_f(x^0)$ sono positivi, allora esiste un intorno di x^0 dove la superficie di equazione $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ sta sopra al piano tangente in x^0 . Se tutti gli autovalori di $H_f(x^0)$ sono negativi, allora esiste un intorno di x^0 dove la superficie di equazione $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ sta sotto al piano tangente in x^0 . Se $H_f(x^0)$ ha autovalori di entrambi i segni, allora la superficie di equazione $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ attraversa il piano tangente in x^0 .*

Un caso limite è quando il segno degli autovalori è costante ma in senso largo e cioè o vale $\lambda_1 = 0$ oppure $\lambda_n = 0$. La discussione in questi casi è più fine e la affronteremo solo nel caso $n = 2$. Il Teorema 3.26 si può enunciare geometricamente dicendo che *se tutti gli autovalori di $H_f(x^0)$ sono positivi (negativi) allora la funzione f è convessa (concava) in x^0 .*

Il Teorema 3.26 è utile per determinare i *massimi e minimi* relativi della funzione f . I punti candidati ad essere tali sono individuati dal

Teorema 3.27. (Teorema di Fermat)

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in un punto $x^0 \in \mathbb{R}^n$ di estremo relativo: allora $\nabla f(x^0) = 0$.

Ma, come in dimensione $n = 1$, non vale il viceversa: se anche $\nabla f(x^0) = 0$, non è detto che x^0 sia un estremo relativo per f . Se $x^0 \in \mathbb{R}^n$ è un **punto critico (o stazionario)** per f , e cioè $\nabla f(x^0) = 0$, allora il piano tangente è orizzontale e l'eventuale convessità/concavità di f in x^0 implica che x^0 sia un punto di minimo/massimo relativo per f . Invece, nel caso in cui la superficie attraversi il piano tangente, il punto critico si chiama di **sella** o **colle** (questo

secondo nome rende bene l'idea di un passo di montagna). Vogliamo quindi combinare i Teoremi 3.26 e 3.27 per ottenere condizioni sufficienti affinché un punto sia di estremo relativo.

Ci limiteremo a studiare in dettaglio il caso $n = 2$ dato che, in tal caso, il Teorema 3.26 può essere riscritto in modo più semplice. Ricordando che la traccia e il determinante di una matrice sono, rispettivamente, la somma e il prodotto dei suoi autovalori, otteniamo immediatamente il

Corollario 3.28. *Sia f di classe C^2 in un punto critico $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Se $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) > f_{xy}(x_0, y_0)^2$ allora f ha un estremo relativo in (x_0, y_0) : se $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ allora il punto è di minimo relativo, se $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ allora il punto è di massimo relativo.*

Si ha $\det H_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2$. Se i due autovalori sono concordi il determinante è positivo e, in particolare, non può essere $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$. Se i due autovalori sono discordi, allora il determinante è negativo.

Il Corollario 3.28 ha anche una dimostrazione diretta che utilizza... il segno del trinomio di secondo grado. Il nostro problema è trovare una condizione sufficiente affinché la quantità $f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$ abbia lo stesso segno per ogni scelta di $(h, k) \neq (0, 0)$. Dividendo per k^2 e ponendo $t = h/k$, vorremmo che il trinomio $f_{xx}t^2 + 2f_{xy}t + f_{yy}$ avesse segno costante; questo è garantito se il suo discriminante ridotto $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ è negativo. Se così fosse, il segno del trinomio sarebbe sempre quello di f_{xx} .

Resta da stabilire come comportarsi nel caso in cui il determinante sia nullo, e cioè se almeno uno degli autovalori è nullo.

Esempio 3.29. *Le tre funzioni $f_1(x, y) = x^4 + y^4$, $f_2(x, y) = x^4 - y^4$, $f_3(x, y) = -x^4 - y^4$ hanno tutte matrice Hessiana nulla in $(0, 0)$; f_1 ha un punto di minimo, f_2 un punto di sella, f_3 un punto di massimo in $(0, 0)$.*

Quindi... può succedere di tutto! Per questo motivo, se $\det H_f = 0$ diremo che siamo nel *caso dubbio*. Per toglierci il dubbio, potremmo analizzare le derivate terze e quarte, se esistono: ma la casistica diventa troppo ampia. Preferiamo allora affrontare il problema direttamente analizzando il segno di $f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Esempio 3.30. *Sia $f(x, y) = x^4 + x^4y^2 - x^2y^4 - y^4 + 1$. Allora $\nabla f(0, 0)$ si annulla e anche la matrice $H_f(0, 0)$ è nulla. Tuttavia,*

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 - y^2)(x^2 + x^2y^2 + y^2)$$

e quindi $f(x, y) > f(0, 0)$ nei settori $|x| > |y|$, mentre $f(x, y) < f(0, 0)$ nei settori $|x| < |y|$. Pertanto, $(0, 0)$ è punto di sella.

Esercizio 3.31. Sia $f(x, y) = x(x + y)e^{y-x}$. Determinare estremi superiore e inferiore di f in $\mathbb{R}^2$ e studiare la natura dei suoi punti stazionari.

$\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$ dato che

$f_x = (2x + y - x^2 - xy)e^{y-x}$, $f_y = (x + x^2 + xy)e^{y-x}$: i punti stazionari sono $(0, 0)$, $(1/2, -3/2)$.

$f_{xx} = (2 - 4x - 2y + x^2 + xy)e^{y-x}$, $f_{xy} = (1 + x + y - x^2 - xy)e^{y-x}$, $f_{yy} = (2x + x^2 + xy)e^{y-x}$.

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H(1/2, -3/2) = \begin{pmatrix} 5e^{-2}/2 & e^{-2}/2 \\ e^{-2}/2 & e^{-2}/2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $(0, 0)$ è punto di , $(1/2, -3/2)$ è punto di .

3.6 Ottimizzazione vincolata

3.6.1 Il metodo geometrico delle curve di livello

Partiamo da un problema elementare: quale rettangolo di perimetro $l > 0$ ha area massima? Detta x la base e y l'altezza del generico rettangolo, vogliamo massimizzare $f(x, y) = xy$ con i **vincoli** $2(x + y) = l$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Il vincolo è il segmento rappresentato in Figura 3.8: su questo segmento si troverà la soluzione del problema. Disegniamo le curve di livello di f (rami di iperbole) e cerchiamo quella di livello massimo che interseca il vincolo, vedere ancora la Figura 3.8. Ci accorgiamo che quella tangente è quella che ha xy maggiore.

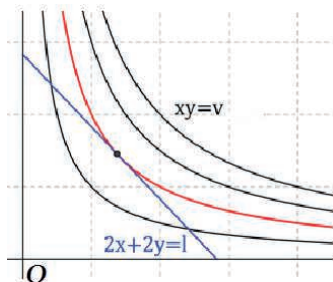


Figura 3.8: Massima area con vincolo di perimetro.

Il punto di tangenza è $(\frac{l}{4}, \frac{l}{4})$ e quindi il quadrato di lato $l/4$ è il rettangolo di area massima tra quelli di perimetro l .

Questo è un esempio di *massimizzazione vincolata*: c'è una *funzione obiettivo* $z = f(x, y)$ (l'area) che vogliamo massimizzare quando le variabili x e y sono legate da un vincolo $g(x, y) = 0$ (il perimetro). Per risolvere questo problema dobbiamo prima rappresentare il vincolo e poi disegnare le curve di livello dell'obiettivo. Tra queste curve, che sono “circa parallele”, va scelta

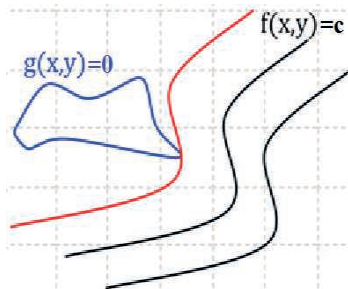


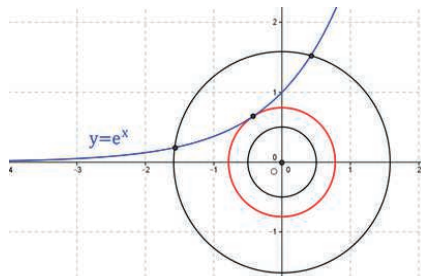
Figura 3.9: Curva di livello tangente al vincolo.

quella di livello massimo che interseca il vincolo: ci aspettiamo che tale curva sia tangente al vincolo stesso, si veda la curva rossa in Figura 3.9.

Naturalmente, lo stesso principio vale per una minimizzazione vincolata.

Esercizio 3.32. Siano $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = y - e^x$. Determinare il minimo di $f(x, y)$ con il vincolo $g(x, y) = 0$.

Graficamente, il problema si rappresenta come



Pertanto,

Il metodo geometrico appena illustrato è quello che meglio descrive cosa si intende per ottimizzazione vincolata. Inoltre, è estremamente utile per spiegare alcuni metodi analitici, come vedremo nei prossimi paragrafi.

3.6.2 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Dalla discussione del precedente paragrafo e dalla Figura 3.9 deduciamo che un punto di ottimo per f vincolato a $g = 0$ si ottiene cercando una curva di livello di f che sia tangente alla curva di livello 0 di g . Dato che il gradiente di una funzione è ortogonale alla sua curva di livello, la condizione di tangenza tra le due curve di livello si traduce in una relazione di proporzionalità tra

∇f e ∇g . Questo è il principio che governa il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Siano $f, g \in C^1$ e supponiamo di volere ottimizzare (massimizzare o minimizzare) la funzione $z = f(x, y)$ sotto il vincolo $g(x, y) = 0$. Introduciamo la funzione $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

e che si chiama *Lagrangiana*. Se cerchiamo i punti stazionari (in $\mathbb{R}^3$!) della funzione L siamo portati a risolvere il sistema $\nabla L = 0$ e cioè

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y), \quad g(x, y) = 0. \quad (3.11)$$

Le prime due condizioni in (3.11) si possono riscrivere come $\nabla f = \lambda \nabla g$ ed esprimono la proporzionalità tra gradienti che, a sua volta, descrive la tangenza delle curve di livello di f e g . La terza delle (3.11) è l'equazione del vincolo e dice che la suddetta tangenza va cercata tra i punti che appartengono al vincolo. È chiaro che le (3.11) non distinguono gli eventuali massimi dai minimi e che non è nemmeno detto che una soluzione di (3.11) sia un estremo relativo. Tuttavia,

gli eventuali punti di ottimo di f soggetti al vincolo $g = 0$ vanno cercati tra le soluzioni di (3.11).

Esempio 3.33. Vogliamo determinare i punti di estremo relativo di $f(x, y) = xy$ sotto il vincolo $x^2 - xy + y^2 = 1$. Il problema si rappresenta geometricamente come in Figura 3.10.

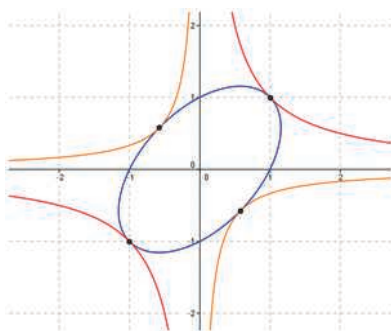


Figura 3.10: Curve di livello tangenti al vincolo.

Poniamo $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1$; il sistema (3.11) diventa

$$y = \lambda(2x - y), \quad x = \lambda(2y - x), \quad x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Questo sistema ammette soluzioni

$$(x, y, \lambda) \in \left\{ (1, 1, 1); (-1, -1, 1); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Dato che il vincolo è un insieme chiuso e limitato, il Teorema 3.11 (di Weierstrass) garantisce che f assume massimo e minimo su di esso. Poiché $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$ e $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3}$, i primi due sono punti di massimo vincolato, gli ultimi due sono punti di minimo vincolato.

L'Esempio 3.33 ci insegna diverse cose. Prima di tutto, il valore esatto del moltiplicatore λ non è essenziale: permette di trovare i punti candidati ma non serve per calcolare il livello della funzione. Inoltre, un'analisi più attenta ci permette di capire la differenza tra $\lambda \leq 0$: in un caso i gradienti sono concordi nell'altro sono discordi e questo ci dice se g e f variano nello stesso verso o in verso opposto. A meno di sapere in quale verso varia f non possiamo però stabilire se i punti sono di massimo o di minimo vincolati. L'Esempio 3.33 ci spiega anche come utilizzare il Teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza dei punti di ottimo: ricordiamo che il Teorema 3.11 si può applicare solo se il vincolo è chiuso e limitato.

Il Teorema di Weierstrass si può anche applicare a problemi di ottimizzazione con vincoli di *disuguaglianza*. Dette f, g le funzioni dell'Esempio 3.33, supponiamo di voler ottimizzare f con il vincolo $g(x, y) \leq 0$. Per questo problema, la regione ammissibile è quella (chiusa e limitata) che ha per frontiera l'ellisse rappresentata in Figura 3.10: sul bordo dell'ellisse già sappiamo quali sono gli estremi di f , resta quindi da stabilire cosa succede all'interno. Per questo studio possiamo utilizzare il Corollario 3.28: l'unico punto critico libero di f è l'origine che è un punto di sella. Pertanto, anche con il vincolo di disuguaglianza, gli estremi assoluti di f sono quelli trovati nell'Esempio 3.33.

Non è però detto che il vincolo, di uguaglianza o disuguaglianza sia chiuso e limitato. In tal caso, il Teorema di Weierstrass non si applica.

Esercizio 3.34. Determinare gli estremi relativi della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ nella regione $y \geq x^2$.

La regione è quella interna alla parabola $y = x^2$ che non è limitata. Risulta

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \quad, \quad f_y(x, y) = \quad, \\ f_{xx}(x, y) &= \quad, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \quad, \quad f_{yy}(x, y) = \quad. \end{aligned}$$

Pertanto, l'unico punto critico libero è $M(\quad, \quad)$ che è interno alla parabola; per il Corollario 3.28, M è un

Il vincolo rappresentante la parabola è $g(x, y) = y - x^2$ e, pertanto, la Lagrangiana è data da $L(x, y, \lambda) = \quad$. I punti critici di L sono $(\quad, \quad, \quad)$, $(\quad, \quad, \quad)$, $(\quad, \quad, \quad)$. Sulla parabola abbiamo dunque $(\quad, \quad)$ e $(\quad, \quad)$ come punti di minimo assoluto, $(\quad, \quad)$ come punto di massimo relativo, mentre il massimo assoluto $\quad$. Nella regione $y \geq x^2$ il minimo assoluto di f è quindi $\quad$ mentre il massimo assoluto è $\quad$.

Nella presentazione del metodo di Lagrange abbiamo volutamente sorvolato due punti delicati. Il primo riguarda il riconoscimento dei punti di massimo

e minimo: dato che, di solito, i punti candidati a essere l'ottimo sono pochi, possiamo pensare di procedere come nell'Esempio 3.33 e di valutare la f nei punti candidati. I punti con f maggiore sono i punti di massimo, quelli con f minore sono i punti di minimo. Tuttavia, si potrebbe anche procedere diversamente: esiste una versione raffinata del Corollario 3.28 che si applica alla Lagrangiana L . Si tratta di andare a studiare il comportamento delle derivate seconde e il segno degli autovalori di un'opportuna matrice. La casistica comprende molteplici situazioni che sono facili da analizzare per un calcolatore, un po' meno per uno studente. Ecco perché abbiamo preferito l'approccio diretto dell'Esempio 3.33.

Il secondo punto è ancora più delicato: cosa succede se uno o entrambi i gradienti ∇f e ∇g si annullano sul vincolo? Se si annulla ∇f e non ∇g troveremo un moltiplicatore nullo e saremo in presenza di un punto critico libero di f : possiamo tranquillamente inserirlo tra i candidati e valutarlo insieme agli altri punti trovati. Se invece si annulla ∇g il metodo di Lagrange non funziona dato che non si riesce a determinare il moltiplicatore. Anche questi punti dobbiamo inserirli tra i candidati e valutarli come gli altri.

Esercizio 3.35. *Trovare massimi e minimi relativi e assoluti di $f(x, y) = xy$ sotto il vincolo $x^4 - 4x^2 + y^4 + 2x^2y^2 = 0$.*

Dato che $x^4 - 4x^2 + y^4 + 2x^2y^2 = [(x+1)^2 + y^2 - 1][(x-1)^2 + y^2 - 1]$, il vincolo si rappresenta come

Gli estremi vincolati di f sono

3.6.3 Il metodo delle restrizioni

Sia $r : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva piana regolare (cfr. Paragrafo 2.2) e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Per trovare

$$\max_{t \in I} f(r(t))$$

(massimo di f sul sostegno di r) possiamo usare la (3.3): risolviamo l'equazione

$$\nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (3.12)$$

per determinare i punti critici della funzione $t \mapsto f(r(t))$ (funzione reale di una variabile reale). Geometricamente, la (3.12) dice che $\nabla f(r(t)) \perp r'(t)$ e cioè che il vettore tangente alla curva è perpendicolare al gradiente e quindi tangente anche alla curva di livello di f . Trovate le soluzioni di (3.12) avremo i candidati massimi (e minimi) di f vincolati al sostegno di r .

Non è sempre possibile esprimere il vincolo come sostegno di una curva regolare $r = r(t)$. Si può comunque cercare di “fare entrare il vincolo” nell’espressione di f . Per spiegare questo metodo riprendiamo in esame il problema considerato nell’Esercizio 3.34 e ci proponiamo di ottimizzare $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ sotto il vincolo $y = x^2$. Per inserire il vincolo nella f dobbiamo valutare la restrizione di f alla parabola: $f(x, x^2) = x^4 - x^2$. Questa funzione, della sola variabile x , la dobbiamo ottimizzare per $x \in \mathbb{R}$. Troviamo che ha un massimo relativo in $x = 0$ e due minimi assoluti in $x = \pm 1/\sqrt{2}$; non esiste invece il massimo assoluto dato che tende a $+\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ e cioè quando il punto si allontana indefinitamente dal vertice. A queste x corrispondono delle $y = x^2$: pertanto il punto $(0, 0)$ è massimo relativo vincolato, i punti $(\pm 1/\sqrt{2}, 1/2)$ sono punti di minimo assoluto vincolati, non esiste il massimo assoluto vincolato.

Quanto visto in questo paragrafo si spiega geometricamente come segue. Anziché lasciare all’argomento di $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *due* gradi di libertà, ne lasciamo *uno solo*. Facciamo una **restrizione** del grafico di f ad una linea, che sia in forma parametrica o cartesiana. Dato che abbiamo un solo grado di libertà, gli estremi relativi si trovano con gli strumenti delle funzioni reali di una variabile reale.

Esercizio 3.36. *Trovare massimi e minimi assoluti di $f(x, y) = x^2 + y$ sulla circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 = 1$.*

Su Γ abbiamo $f(x, y) = h(y) = 1 - y^2 + y$ con $y \in [-1, 1]$. Quindi,

4 Integrazione multipla

4.1 Integrali doppi

Così come l'integrale semplice può servire per il calcolo delle aree, l'integrale doppio può servire per il calcolo dei volumi. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione anch'essa limitata; ci proponiamo di dare un significato geometrico all'integrale

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy. \quad (4.1)$$

Se $f \geq 0$, calcolare questo integrale significa determinare il volume del solido che si proietta in Ω e che, su Ω , ha altezza $f(x, y)$, si veda la Figura 4.1.

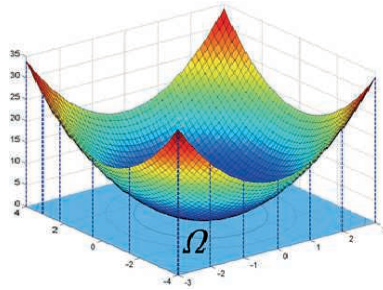


Figura 4.1: Volume sotteso dal grafico di una funzione di due variabili.

Naturalmente, la geometria di Ω può essere qualunque: in Figura 4.1 abbiamo scelto il caso più facile, quando Ω è un rettangolo. Iniziamo proprio dai rettangoli per il calcolo di (4.1): sia $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, vedi Figura 4.2. Suddividiamo i lati di Ω in n intervallini, tali che

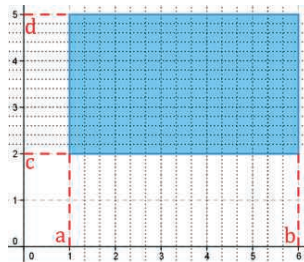


Figura 4.2: Suddivisione di un rettangolo in rettangolini.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d, \quad y_i - y_{i-1} = \frac{d-c}{n} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Si creano così n^2 rettangolini di area $(b-a)(d-c)/n^2$; poniamo $R_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$. Procediamo con il metodo di Riemann e definiamo le somme superiori e le somme inferiori:

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &= \sum_{i,j=1}^n |R_{i,j}| \cdot \sup_{R_{i,j}} f(x, y) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \sup_{R_{i,j}} f(x, y), \\ \underline{S}_n &= \sum_{i,j=1}^n |R_{i,j}| \cdot \inf_{R_{i,j}} f(x, y) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \inf_{R_{i,j}} f(x, y). \end{aligned}$$

Osserviamo che $\bar{S}_n \geq \underline{S}_n$ per ogni n ; pertanto,

$$\inf_n \bar{S}_n \geq \sup_n \underline{S}_n \quad (4.2)$$

qualunque sia la funzione limitata f . Se in (4.2) vale l'uguaglianza, diremo che f è **integrabile** su Ω e indicheremo con (4.1) il valore comune nell'uguaglianza (4.2); indichiamo con $R(\Omega)$ lo spazio delle funzioni integrabili su Ω .

Una funzione limitata non integrabile è la *funzione di Dirichlet* che si costruisce come nel caso monodimensionale. Sia $\Omega = (0, 1)^2$ il quadrato unitario e consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora $\bar{S}_n = 1$ e $\underline{S}_n = 0$ per ogni suddivisione; quindi in (4.2) vale la disuguaglianza stretta.

Sono invece integrabili le funzioni continue:

$$f \in C^0(\bar{\Omega}) \implies f \in R(\Omega); \quad (4.3)$$

ricordiamo che $\bar{\Omega}$ indica la *chiusura* di Ω e comprende dunque anche la sua frontiera. Sono poi integrabili le funzioni che hanno discontinuità di tipo salto con le stesse considerazioni fatte nel Paragrafo 1.1. Questo ci consente di integrare funzioni limitate su insiemi aperti Ω diversi da rettangoli procedendo nel modo seguente. Presa una funzione $f \in C^0(\bar{\Omega})$ si costruisce un rettangolo $R \supset \Omega$ e si definisce la funzione

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dato che g può avere solo discontinuità di tipo salto (in corrispondenza dei punti di $\partial\Omega$), il metodo sopra descritto permette di definire $\int_{\Omega} f = \int_R g$.

Questo metodo non consente però di calcolare integrali in modo efficace. Prima di vedere come si deve procedere per il calcolo di integrali doppi su un'ampia classe di insiemi, enunciamo alcune semplici proprietà degli integrali.

Per ogni $f, g \in R(\Omega)$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x, y) \geq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \implies \int_{\Omega} f(x, y) \, dxdy \geq \int_{\Omega} g(x, y) \, dxdy,$$

$$\int_{\Omega} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dxdy = \alpha \int_{\Omega} f(x, y) \, dxdy + \beta \int_{\Omega} g(x, y) \, dxdy.$$

Vale anche una proprietà di additività rispetto al dominio di integrazione: se Ω_1 e Ω_2 sono aperti disgiunti e $f \in R(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, allora

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x, y) \, dxdy = \int_{\Omega_1} f(x, y) \, dxdy + \int_{\Omega_2} f(x, y) \, dxdy. \quad (4.4)$$

Stiamo qui considerando insiemi aperti Ω ma se prendessimo la loro chiusura $\overline{\Omega}$ non cambierebbe il valore dell'integrale. È però più conveniente usare gli insiemi aperti per evitare spiacevoli inconvenienti quando si intersecano insiemi chiusi. Infine, generalizziamo il Teorema della media al caso di integrali doppi:

$$f \in C^0(\overline{\Omega}) \implies \exists (x_0, y_0) \in \Omega, \quad f(x_0, y_0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x, y) \, dxdy$$

dove $|\Omega| = \int_{\Omega} dxdy$ indica la *misura* (area) di Ω supposto connesso.

Vediamo adesso come si procede, in pratica, per il calcolo degli integrali doppi. Iniziamo a definire gli insiemi semplici.

Definizione 4.1. *Siano $a < b$; se esistono $g, h \in C^0[a, b]$ tali che $g < h$ su (a, b) , allora la regione piana*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, g(x) < y < h(x)\}$$

viene detta regione semplice rispetto a y , mentre la regione piana

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < y < b, g(y) < x < h(y)\}$$

viene detta regione semplice rispetto a x .

Pertanto, una regione semplice rispetto a y sta all'interno di una striscia del tipo $a < x < b$; per verificare che Ω sia semplice, bisogna controllare che l'intersezione di ogni retta verticale con Ω sia un segmento oppure sia vuota. Analogamente, per le regioni semplici rispetto a x . In Figura 4.3 rappresentiamo delle regioni piane semplici. Ci sono delle regioni piane che sono semplici sia rispetto a x che rispetto a y : ad esempio, un rettangolo $(a, b) \times (c, d)$, un qualunque triangolo, una circonferenza, un qualunque insieme convesso. Il lettore rifletta attentamente su questi esempi. Ma esistono regioni che non sono semplici né rispetto a x né rispetto a y : ad esempio una corona circolare.

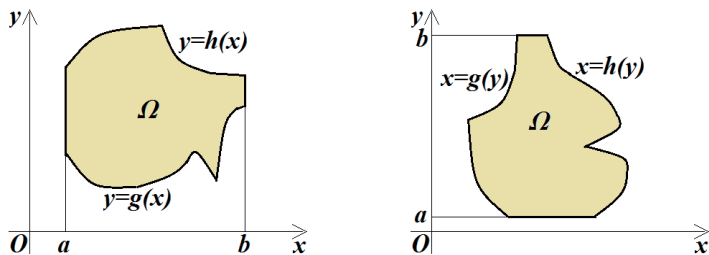


Figura 4.3: Regioni semplici rispetto a y (sinistra) e rispetto a x (destra).

Definizione 4.2. Una regione piana Ω si dice **regolare** se può scomporsi in unione finita di regioni semplici.

Una corona circolare è regolare. Esistono anche dei domini irregolari, ad esempio la regione compresa tra due spirali del tipo $\rho = e^\theta$ (in coordinate polari). Tuttavia, la classe degli insiemi regolari è sufficientemente ampia da consentire il calcolo di integrali nelle situazioni utili nelle applicazioni (geometriche, fisiche, ingegneristiche).

È chiaro che se siamo in grado di calcolare gli integrali nelle regioni semplici, sfruttando la (4.4) saremo in grado di calcolarli anche nelle regioni regolari. L'idea è quella di usare il principio elementare che permette di calcolare il volume di un solido moltiplicando l'area di base con l'altezza. Questo principio è esatto nel caso di un parallelepipedo, ma si può opportunamente adattare anche ad altri solidi. Per semplicità, consideriamo dapprima la situazione dove l'insieme di integrazione Ω è un rettangolo, $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, vedi Figura 4.4 a sinistra. Ma anziché prendere Ω stesso come base, prendiamo una “sezione”

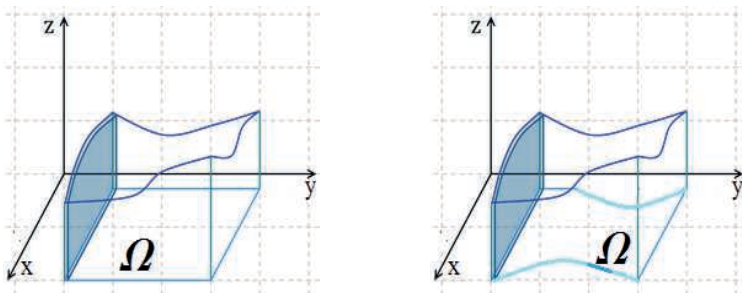


Figura 4.4: Area della sezione rispetto a y .

verticale tagliando a fette il “plumcake”, vedi ancora la Figura 4.4. Per ogni y fissato la fetta ha un'area data da

$$\int_a^b f(x, y) dx.$$

In pratica, prendiamo la restrizione di f al segmento $x \in [a, b]$ con y fissata (che diventa un parametro) e calcoliamo l'area come un integrale della sola variabile x . Poi però dobbiamo far variare la y e ci accorgiamo che l'area della fetta dipenderà dalla y considerata. Per tenere conto di questa variazione, invece di moltiplicare base per altezza come sopra menzionato, calcoliamo l'integrale

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Questa **formula di riduzione** è applicabile anche a domini semplici rispetto a x ma non rettangolari, vedi Figura 4.4 a destra. In tal caso, anche la larghezza della fetta dipende da y ma il principio è lo stesso: la fetta ha un'area data da

$$\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx.$$

L'intervallo $x \in [g(y), h(y)]$ dipende, appunto, da y così come la funzione integranda; il calcolo dell'integrale fornisce una quantità che dipende da y e che rappresenta l'area della fetta di altezza e larghezza variabile. Questa quantità va poi integrata rispetto a y e si ottiene

$$\int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Questa pittoresca descrizione si può anche rendere rigorosa. Noi non lo faremo ma formalizziamo quanto appena visto nel seguente

Teorema 4.3. (Formula di riduzione per integrali doppi)

Siano $a < b$ e siano $g, h \in C^0[a, b]$ tali che $g < h$ su (a, b) .

Posto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, g(x) < y < h(x)\},$$

se risulta $f \in R(\Omega)$ allora vale la formula di riduzione

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Posto invece

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < y < b, g(y) < x < h(y)\},$$

se risulta $f \in R(\Omega)$ allora vale la formula di riduzione

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx dy.$$

Il Teorema 4.3 afferma che, su una regione semplice, un integrale doppio si può calcolare con due integrazioni successive. Se poi la regione fosse regolare ma non semplice, si può scomporre in un numero finito di regioni semplici sulle quali applicare il Teorema 4.3 e concludere sommando, si veda la (4.4).

Esempio 4.4. Sia D il dominio piano compreso tra le tre rette d'equazione $y = 0$, $y = x$, $x = 2$ e l'iperbole di equazione $xy = 1$; calcoliamo

$$I = \int_D xy^2 dx dy.$$

Anche se il dominio D è semplice sia rispetto a x che rispetto a y , conviene scomporlo in due domini e usare la (4.4):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^x xy^2 dy dx + \int_1^2 \int_0^{1/x} xy^2 dy dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^x dx + \int_1^2 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{1/x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{3} dx + \int_1^2 \frac{dx}{3x^2} = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

Gli integrali doppi possono essere utilizzati per il calcolo del *baricentro* di una lamina piana e del *momento di inerzia* della lamina rispetto a un asse perpendicolare al piano della lamina. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ la forma della lamina e sia $d(x, y)$ la densità di massa nel punto $(x, y) \in D$. La massa totale della lamina è data da

$$m = \int_D d(x, y) dx dy. \quad (4.5)$$

Il baricentro è una media pesata con la densità di massa; pertanto, le sue coordinate sono date da

$$x_D = \frac{1}{m} \int_D x d(x, y) dx dy, \quad y_D = \frac{1}{m} \int_D y d(x, y) dx dy. \quad (4.6)$$

Nel caso di materiale omogeneo, la densità è costante, $d(x, y) \equiv d$, e si ha

$$m = d|D|, \quad x_D = \frac{1}{|D|} \int_D x dx dy, \quad y_D = \frac{1}{|D|} \int_D y dx dy.$$

Per il calcolo del momento di inerzia, deve essere nota la distanza $\delta(x, y)$ di ogni punto $(x, y) \in D$ dall'asse perpendicolare. In tal caso, il momento di inerzia vale

$$I = \int_D \delta^2(x, y) d(x, y) dx dy. \quad (4.7)$$

Se la lamina è omogenea, abbiamo appena visto che $d = m/|D|$ e quindi

$$I = \frac{m}{|D|} \int_D \delta^2(x, y) dx dy.$$

4.2 Cambi di variabile negli integrali doppi

Il cambio di variabile negli integrali di una variabile reale presuppone che vi sia una *corrispondenza biunivoca* tra l'intervallo di integrazione e il suo trasformato. Un modo per garantire che questa trasformazione sia biunivoca è quello di verificare che, all'interno dell'intervallo, la derivata prima della trasformazione non si annulli mai. Per poter effettuare un cambio di variabile in dimensione maggiore dobbiamo trovare qualcosa di analogo.

Il problema è quello di trasformare un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in un insieme $T \subset \mathbb{R}^2$, possibilmente più semplice geometricamente, vedi Figura 4.5. Non

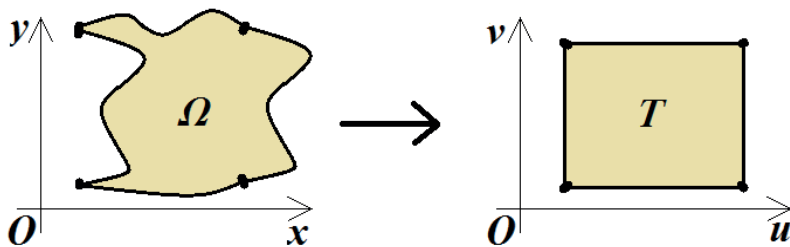


Figura 4.5: Trasformazione di un insieme piano.

sarà sempre possibile ricondursi a un rettangolo ma il dominio potrebbe sensibilmente semplificarsi. Stiamo quindi pensando di costruire una funzione $\Phi : \Omega \rightarrow T$ che sia invertibile. Per districarci meglio, chiamiamo $(u, v) \in T$ le nuove variabili, $(u, v) = \Phi(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \Omega$:

$$\Phi \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega. \quad (4.8)$$

Se questa trasformazione Φ è invertibile, è possibile esprimere (x, y) in funzione di (u, v) :

$$\Phi^{-1} \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in T. \quad (4.9)$$

Resta da trovare una condizione sulle derivate che implichi che la funzione Φ (e quindi Φ^{-1}) sia invertibile. Dato che ci sono 4 derivate in gioco, le raggruppiamo in una matrice.

Definizione 4.5. Sia $\Phi : \Omega \rightarrow T$ una trasformazione piana con componenti $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ di classe C^1 . Si chiama **matrice Jacobiana** della trasformazione Φ la matrice

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobiana contiene tutte le informazioni sulle derivate delle funzioni in gioco. Se risulta

$$\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (4.10)$$

allora Φ è localmente invertibile: ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ ammette un intorno dove Φ è invertibile. La dimostrazione rigorosa di questo risultato è lunga e delicata. A differenza del caso monodimensionale (condizione di non annullamento della derivata) la (4.10) non consente però di concludere che Φ sia globalmente invertibile.

Esempio 4.6. Sia $\Omega = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ e siano $u(x, y) = y \sin x$ e $v(x, y) = y \cos x$; con queste trasformazioni, Ω viene trasformato in $T = \mathbb{R}^2$. Inoltre,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} y \cos x & \sin x \\ -y \sin x & \cos x \end{pmatrix} \implies \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = y \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Ma il punto $(u, v) = (0, 1) \in T$ ha infinite controimmagini: $(x, y) = (2n\pi, 1) \in \Omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La trasformazione $\Omega \rightarrow T$ non è dunque invertibile.

D'altra parte, anche nel caso monodimensionale, se la funzione è C^1 e globalmente invertibile non è detto che valga la (4.10): si pensi alla funzione $f(x) = x^3$ che sta in $C^\infty(\mathbb{R})$ ed è invertibile ma la sua derivata si annulla in $x = 0$. Serviranno quindi entrambe queste condizioni. Nel caso in cui Φ sia globalmente invertibile e valga la (4.10), risulta ben definita la (4.9); avrà anch'essa componenti di classe C^1 e una matrice Jacobiana data da

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}.$$

Per una funzione di una variabile $f : I \rightarrow J$ (con I e J intervalli aperti) sappiamo che se $f \in C^1(I)$ e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ allora f è invertibile e la sua inversa è anch'essa di classe C^1 con derivata non nulla. Nel caso attuale, ci aspettiamo quindi che se vale la (4.10) risulti anche

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in T. \quad (4.11)$$

Questa condizione di non annullamento viene garantita solo nell'insieme *aperto*, esattamente come avviene invertendo la funzione $\sin x$ la cui inversa $\arcsin x$ ha una derivata infinita agli estremi dell'intervallo di definizione. Il numero (4.11) rappresenta il fattore che dilata o contrae l'elemento d'area: un sottoinsieme $\omega \subset \Omega$ molto piccolo viene trasformato in un sottoinsieme $\tau \subset T$ molto piccolo e il fattore di proporzionalità tra le due aree sarà proprio il valore assoluto di (4.11). Abbiamo dunque

$$dx dy = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv.$$

Il segno di (4.11) stabilisce se l'orientazione (x, y) è conservata (segno positivo) o invertita (segno negativo) nel piano (u, v) , proprio come il segno di f' per una funzione di variabile reale. Se il valore assoluto di (4.11) risulta maggiore di 1 vi è una dilatazione, se risulta minore di 1 vi è una contrazione, proprio come $|f'|$ per la funzione di variabile reale, si veda la Figura 4.6.

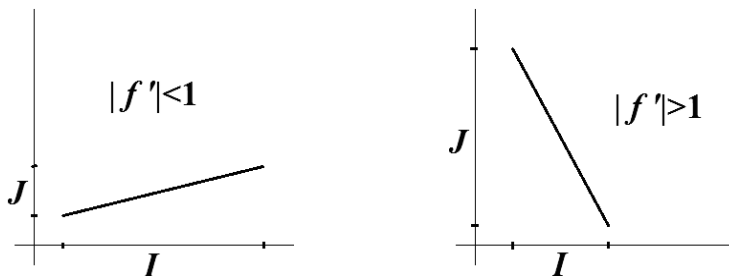


Figura 4.6: Contrazione (sinistra) e dilatazione (destra) di un intervallo.

Possiamo adesso enunciare il

Teorema 4.7. (Cambiamento di variabili negli integrali doppi)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato regolare e sia $\Phi : \Omega \rightarrow T$ una trasformazione piana invertibile di classe C^1 , vedi (4.8). Allora, detta Φ^{-1} la sua inversa in (4.9), se vale la (4.10) vale anche la (4.11). Sia poi $f \in R(\Omega)$; allora

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_T f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

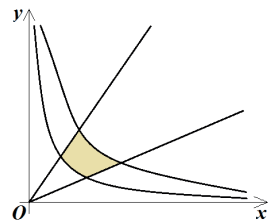
Invitiamo il lettore a fare il confronto con gli integrali di una variabile.

Esempio 4.8.

Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{y}{x} < \sqrt{3}, 1 < xy < 3\}$ e calcoliamo

$$\int_{\Omega} \log(xy) dx dy.$$

L'insieme Ω è rappresentato sulla destra.



Posto $u = xy$ e $v = \frac{y}{x}$, ricaviamo $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ e $y = \sqrt{uv}$: Ω si trasforma nel rettangolo $T = (1, 3) \times (\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ del piano (u, v) . Poiché

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} > 0,$$

possiamo calcolare

$$\int_{\Omega} \log(xy) dx dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \log u du \int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dv}{v} = \frac{\log 3}{2} (3 \log 3 - 2).$$

Nel caso bidimensionale, la scelta del cambio di variabile dipende sia dalla forma dell'integranda che dalla geometria dell'insieme di integrazione.

Un cambiamento di variabili piuttosto utile è quello in coordinate polari. Fissato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, i punti $(x, y) \in \Omega$ vengono trasformati in punti $(\rho, \vartheta) \in T \subset \mathbb{R}^2$ tali che

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

Questa è l'espressione dell'inversa, simile alla (4.9), che è quella che serve per calcolare la matrice Jacobiana nell'integrale. In questo caso abbiamo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{pmatrix} \implies \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \rho$$

e il fattore di variazione dell'area è ρ , si veda la Figura 4.7. La funzione

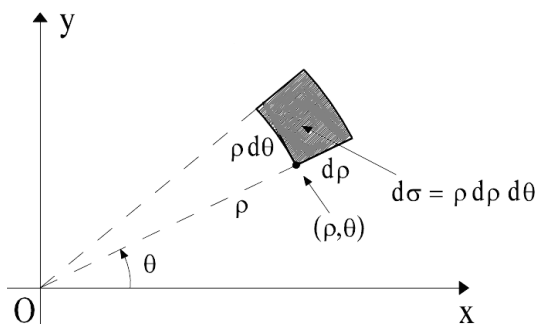


Figura 4.7: Elemento di area in coordinate polari.

$\Phi : (x, y) \mapsto (\rho, \vartheta)$ trasforma il piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nella striscia $(\rho, \vartheta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$. Il caso delicato è $\rho = 0$ per il quale non è definito un valore di ϑ ; ma trattandosi di un punto di frontiera, non deve preoccupare. Inoltre, proprio per $\rho = 0$ si annulla il determinante Jacobiano. Se anziché l'intero piano $\mathbb{R}^2$ volessimo trasformare un disco o una porzione di corona circolare, avremmo le trasformazioni rappresentate in Figura 4.8.

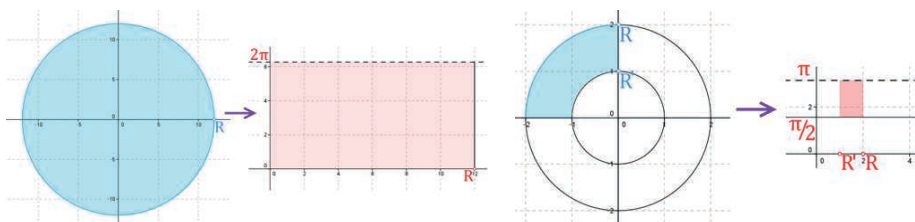


Figura 4.8: Trasformazione di insiemi in coordinate polari.

Il cambio in coordinate polari è consigliabile quando nell'integranda compare l'espressione $x^2 + y^2$.

Esempio 4.9. *Calcoliamo*

$$\int_{\Omega} \frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4, 0 < y < x\}$. Passando in coordinate polari, l'integrale diventa

$$\int_1^2 \int_0^{\pi/4} \cos \vartheta e^{\sin \vartheta} d\vartheta d\rho = [\rho]_1^2 [e^{\sin \vartheta}]_0^{\pi/4} = e^{1/\sqrt{2}} - 1.$$

È anche possibile usare le coordinate polari per calcolare il volume della sfera di raggio R . La sua disequazione è $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ e, volendo scriverla in forma cartesiana, $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} < z < \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Il volume V della sfera è il doppio del volume della calotta sferica superiore (emisfero nord). Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco del piano (x, y) che taglia in due la sfera: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < R^2\}$. Allora, con semplici passaggi otteniamo

$$V = 2 \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Anche se l'insieme di integrazione sembra non semplificarsi con il cambio in coordinate polari, potrebbe essere conveniente lo stesso fare questo cambio.

Esercizio 4.10. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la regione piana delimitata dalle circonferenze d'equazione $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Calcolare

$$\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

In coordinate polari le circonferenze diventano $\rho =$ e $\rho =$.
Pertanto, l'integrale diventa

4.3 Integrali tripli

Con tecniche simili a quelle appena esposte si possono integrare funzioni di più variabili. Vediamo qui come si integra una funzione di tre variabili, $w = f(x, y, z)$. La definizione è del tutto simile: si parte dai parallelepipedi anziché dai rettangoli e si valutano i limiti delle somme superiori e inferiori. Poi però ci troviamo nuovamente di fronte al problema del calcolo che non si riesce ad effettuare con la definizione. Passiamo quindi direttamente alle formule di riduzione per integrali tripli.

Ridurre un integrale triplo significa scomporre $3 = 1 + 2$ oppure $3 = 2 + 1$, cioè svolgere prima un integrale semplice e poi un integrale doppio o viceversa. Salvo pochi casi dove si può operare in entrambi i modi (per esempio, nei parallelepipedi rettangoli) la scelta dipenderà dalla forma dell'insieme di integrazione.

Se l'insieme Ω è semplice rispetto alla z e cioè esistono $D \subset \mathbb{R}^2$ e $g, h \in C^0(\overline{D})$ tali che $g < h$ in D e

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, g(x, y) < z < h(x, y)\},$$

allora si procede *per fili*. Data $f \in C^0(\overline{\Omega})$ si ha

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left(\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Si calcola quindi prima l'integrale interno rispetto a z e il risultato è una funzione che dipende solo da x e y ; questa funzione di due variabili si integra poi sull'insieme piano D . In Figura 4.9 viene illustrato questo metodo. Possiamo

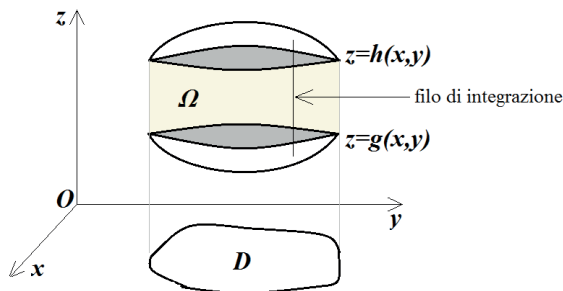


Figura 4.9: Integrazione per fili.

integrare per fili perché l'intersezione tra una retta parallela all'asse z e Ω è un segmento oppure è vuota.

Esempio 4.11. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < x < 2, 0 < y < 1, 0 < z < e^{xy}\}$; calcoliamo

$$I = \int_{\Omega} (2xz - y) dx dy dz.$$

Posto $R = (0, 2) \times (0, 1)$, procedendo per fili otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \int_R \left(\int_0^{e^{xy}} (2xz - y) dz \right) dx dy = \int_R (x e^{2xy} - y e^{xy}) dx dy \\ &= \int_0^2 \int_0^1 x e^{2xy} dy dx - \int_0^1 \int_0^2 y e^{xy} dx dy = \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Analogamente si procede nel caso di domini semplici rispetto a x o a y . Ma non tutti i domini sono semplici rispetto a una delle tre variabili.

Se Ω è semplice rispetto alla coppia (x, y) e cioè esistono $a < b$ tali che

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a < z < b, (x, y) \in D_z \forall z \in (a, b)\}$$

dove D_z è un insieme regolare per ogni $z \in (a, b)$, allora si procede *per strati*. Data $f \in C^0(\overline{\Omega})$ si ha

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Si calcola quindi prima l'integrale doppio interno rispetto a x e y ; il risultato è una funzione che dipende solo da z che viene poi integrata sull'intervallo (a, b) . In Figura 4.10 viene illustrato questo metodo. Possiamo integrare per strati

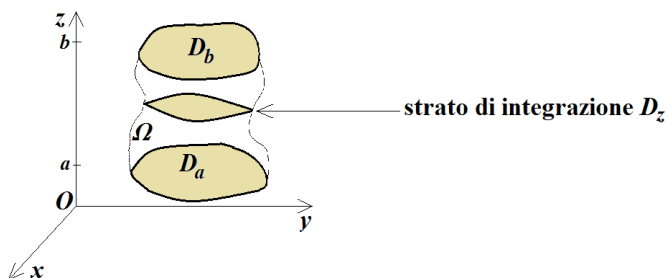


Figura 4.10: Integrazione per strati.

perché l'intersezione tra un piano parallelo al piano $z = 0$ e Ω è un insieme regolare oppure è vuota. Analogamente si procede nel caso di domini semplici rispetto alle coppie (x, z) o (y, z) .

Esercizio 4.12. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Calcolare

$$I = \int_{\Omega} y dx dy dz.$$

Integrando per strati rispetto a z si ha

Concludiamo questo paragrafo osservando come le formule (4.6) e (4.7), per il calcolo del baricentro di un solido e per il momento di inerzia di un solido rispetto a un asse, si estendano in modo ovvio al caso tridimensionale.

4.4 Cambi di variabile negli integrali tripli

Anche le formule di cambio di variabili negli integrali tripli si ricavano senza sorprese rispetto a quelle per gli integrali doppi. Ci concentreremo qui però solo sui due cambi più frequenti che sono quelli in coordinate cilindriche e in coordinate sferiche.

Le *coordinate cilindriche* sono le coordinate polari con una dimensione invariante (la z) in più. Per ogni $\rho \in [0, \infty)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$ si pone

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad z = z.$$

Questa è l'espressione della trasformazione $(\rho, \vartheta, z) \mapsto (x, y, z)$ che serve per calcolare la matrice Jacobiana nell'integrale triplo. In questo caso abbiamo

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \vartheta, z)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \vartheta, z)} = \rho$$

e il fattore di variazione del volume è ρ . Questo si annulla solo sull'asse z che è parte della frontiera dell'insieme dove variano (ρ, ϑ, z) .

Esercizio 4.13. Calcolare il volume del cilindro circolare di altezza h e di circonferenza di base di raggio R .

Posto $C_{R,h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < R^2, 0 < z < h\}$, il volume cercato è

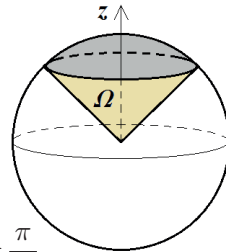
$$\int_{C_{R,h}} dx dy dz = \quad .$$

Esempio 4.14. Dato $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, z^2 > x^2 + y^2, z > 0\}$, calcoliamo

$$I = \int_{\Omega} z(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

L'insieme Ω è l'intersezione della sfera unitaria con un cono, si veda figura accanto. Procedendo in coordinate cilindriche otteniamo:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} z \rho^3 dz d\rho d\vartheta = \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \rho^3 (1 - 2\rho^2) d\rho = \frac{\pi}{48}.$$



Le *coordinate sferiche* sono come le coordinate sul “mappamondo”. Per ogni $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$ si pone

$$x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Questa è l'espressione della trasformazione $(\rho, \varphi, \vartheta) \mapsto (x, y, z)$ che serve per calcolare la matrice Jacobiana nell'integrale triplo. Osserviamo che $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ e che quindi ρ rappresenta la distanza tra il punto (x, y, z) e l'origine. Il polo nord $(x, y, z) = (0, 0, \rho)$ corrisponde a $\varphi = 0$ mentre il polo sud $(x, y, z) = (0, 0, -\rho)$ corrisponde a $\varphi = \pi$; entrambi questi valori di φ sono sulla frontiera dell'insieme dove variano $(\rho, \varphi, \vartheta)$. Nei poli non ha importanza il valore di ϑ e questo ci fa presagire che nei punti dell'asse z il determinante Jacobiano si annullerà. Per le coordinate sferiche abbiamo

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \cos \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \vartheta)} = \rho^2 \sin \varphi$$

che, come previsto si annulla per $\varphi \in \{0, \pi\}$ (poli) e per $\rho = 0$ (centro) e cioè nei punti dell'asse z . In tutti gli altri punti, il fattore di variazione del volume è positivo e vale $\rho^2 \sin \varphi$, si veda la Figura 4.11.

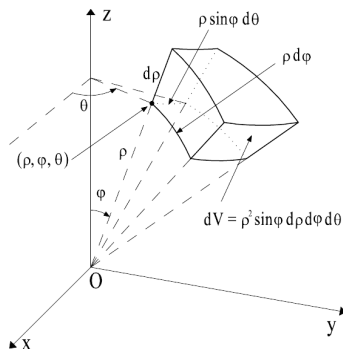


Figura 4.11: Elemento di volume in coordinate sferiche.

Esercizio 4.15. Si calcoli il volume della sfera di raggio R .

Posto $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$, il volume cercato è

$$\int_{S_R} dx dy dz =$$

4.5 Breve cenno agli integrali multipli generalizzati

Come già fatto per gli integrali di una variabile reale, si veda il Paragrafo 1.1, vogliamo estendere la possibilità di calcolare un integrale multiplo anche al caso in cui “non tutto fili liscio”. Per semplicità ci limitiamo a due situazioni particolari.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato e $f \in C^0(\overline{\Omega} \setminus \{x_0\})$ soddisfa $f \geq 0$ (oppure $f \leq 0$) si costruiscono dei **domini invadenti** $\Omega_r = \Omega \setminus B_r(x_0)$. Se poi esiste finito il limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} f(x) dx$$

diremo che f è integrabile in senso generalizzato su Ω e porremo $\int_{\Omega} f$ uguale al limite qui sopra; se invece il limite è infinito, diremo che f non è integrabile su Ω nemmeno in senso generalizzato.

Analogamente, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto illimitato e $f \in C^0(\overline{\Omega})$ soddisfa $f \geq 0$ (oppure $f \leq 0$) si costruiscono ancora dei domini invadenti $\Omega_r = \Omega \cap B_r(0)$. Se poi esiste finito il limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} f(x) dx$$

diremo che f è integrabile in senso generalizzato su Ω e porremo $\int_{\Omega} f$ uguale al limite qui sopra; se invece il limite è infinito, diremo che f non è integrabile su Ω nemmeno in senso generalizzato.

Come esempio ci proponiamo di calcolare... un integrale improprio di una sola variabile reale! Vogliamo calcolare $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ e procediamo nel modo seguente:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho d\vartheta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

dove $\Omega_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 < r^2\}$ e abbiamo sfruttato il passaggio in coordinate polari. Pertanto, $I = \sqrt{\pi}/2$.

5 Funzioni di più variabili a valori vettoriali

5.1 Campi vettoriali

Un campo vettoriale $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una funzione che ad ogni punto dello spazio $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) associa un vettore di $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$). Se $n = m = 1$ abbiamo una funzione reale di variabile reale. Se $n = 1$ e $m \geq 2$ abbiamo una curva, si veda il Capitolo 2. Se $n \geq 2$ e $m = 1$ abbiamo una funzione scalare di più variabili, si veda il Capitolo 3. Ci manca quindi da studiare il caso dove $n \geq 2$ e $m \geq 2$. Come esempio, osserviamo che se in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ scorre un fluido, un campo $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ si può usare per descrivere la velocità della particella in un punto di Ω . Analogamente, si usa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ per descrivere un campo magnetico che agisce in Ω . Queste applicazioni suggeriscono le ipotesi $n = m = 2$ oppure $n = m = 3$ ma, come vedremo, anche altri casi sono importanti nelle applicazioni.

Un esempio di campo vettoriale $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lo abbiamo già incontrato nel Paragrafo 4.2: un cambio di variabile è un caso particolare di campo vettoriale. Il cambio in coordinate polari si può scrivere

$$F : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(\rho, \vartheta) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta).$$

Più generalmente, per rappresentare un campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ useremo entrambe le seguenti notazioni:

$$F(x, y) = \left(F_1(x, y), F_2(x, y) \right), \quad F(x, y) = F_1(x, y)i + F_2(x, y)j,$$

dove le componenti sono funzioni scalari, $F_h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($h = 1, 2$). Analogamente, per rappresentare un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ useremo le notazioni:

$$F(x) = \left(F_1(x), \dots, F_m(x) \right), \quad F(x) = \sum_{h=1}^m F_h(x)e_h, \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

dove le componenti sono funzioni scalari, $F_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($h = 1, \dots, m$) e gli e_h rappresentano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^m$. Se tutte le componenti F_h di F sono di classe C^1 scriveremo $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Esercizio 5.1. *Facendo riferimento al Paragrafo 4.4, esprimere i campi F e G dei cambi di variabili in coordinate sferiche e in coordinate cilindriche.*

$$F(\rho, \phi, \vartheta) = \quad , \quad G(\rho, \vartheta, z) = \quad .$$

Partendo da una curva regolare nello spazio, nel Capitolo 2 abbiamo visto come si trova il vettore tangente in ogni suo punto, cioè il vettore velocità. Vorremmo qui procedere “al contrario” e chiederci se un campo F possa essere visto come il vettore tangente a una certa curva.

Definizione 5.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un aperto; dato un campo $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, chiameremo **linea di campo** di F una curva regolare che in ogni punto del suo sostegno sia tangente a F .

Pertanto, nel caso di un fluido in movimento, una linea di campo è una linea di flusso: è la direzione che segue un punto mobile quando viene immerso nel fluido, si veda la Figura 5.1.

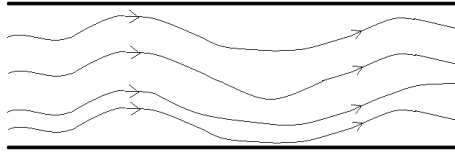


Figura 5.1: Linee di campo in un corso d'acqua.

La Definizione 5.2 caratterizza una linea di campo di $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ con una curva regolare $r = r(t)$ ($t \in I \subset \mathbb{R}$) tale che $r'(t)$ sia proporzionale a $F(r(t))$. Dato che il coefficiente di proporzionalità può essere variabile, questo si traduce nella relazione vettoriale

$$r'(t) = p(t)F(r(t)) \quad (t \in I)$$

dove $p \in C^1(I)$ è la funzione scalare rappresentante la proporzionalità. Osserviamo che $p(t) \neq 0$ per ogni t dato che la curva è regolare; quindi o risulta $p(t) > 0$ oppure $p(t) < 0$ per ogni t : nel primo caso, il verso di percorrenza della curva e il flusso del campo coincidono, nel secondo caso hanno verso opposto. Eliminando $p(t)$ troviamo che le tre componenti dei vettori devono stare nella stessa proporzione:

$$\frac{x'(t)}{F_1(r(t))} = \frac{y'(t)}{F_2(r(t))} = \frac{z'(t)}{F_3(r(t))} \implies \frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)} \quad (5.1)$$

e le linee di campo si ottengono integrando.

Esempio 5.3. Dato il campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$, le (5.1) diventano

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

e integrando due di queste equazioni a variabili separate (la terza dipende dalle prime due) otteniamo $x = az$ e $y = bz$ per $a, b \in \mathbb{R}$: le linee di campo sono quindi tutte le semirette avente estremo nell'origine. Dall'espressione di F deduciamo che il flusso si allontana dall'origine. Una particolare linea di campo è quella degenerare nell'origine.

Le linee di campo hanno significato anche in $\mathbb{R}^2$ e si determinano in modo analogo.

Esempio 5.4. Siano $F(x, y) = (1, y)$ e $G(x, y) = (-y, x)$. Le linee di campo di F hanno equazione $y = ce^x$ ($c \in \mathbb{R}$) con il flusso nel verso delle x crescenti, le linee di campo di G hanno equazione $x^2 + y^2 = R^2$ ($R \in \mathbb{R}$) con il flusso nel verso antiorario, si veda la Figura 5.2. Per $R = 0$, la linea di campo di G

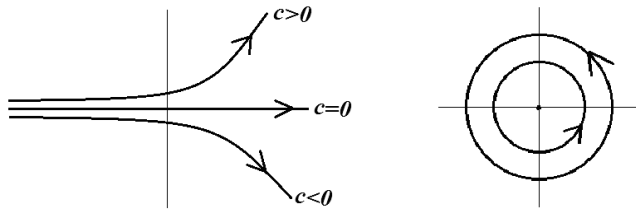


Figura 5.2: Linee di campo di F (sinistra) e G (destra).

degenera nell'origine che è un punto stazionario dove $G = 0$. Il campo F non ha punti stazionari dato che le sue componenti non si annullano mai; la sua seconda componente si può annullare per la linea di campo con $c = 0$ e cioè la retta $y = 0$.

Abbiamo sorvolato sulle definizioni di limite, di continuità, di derivabilità, queste si estendono senza sorprese al caso di campi vettoriali. Per quanto riguarda le derivate, ci sono due tipi di operatori che hanno una certa importanza fisica. Chiamiamo **rotore** di un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il vettore

$$\text{rot} F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \quad (5.2)$$

Un campo a rotore nullo viene chiamato **irrotazionale**. Si definisce il rotore anche di un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ “immergendolo” in $\mathbb{R}^3$: dato $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ si considera $F(x, y, z) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$ come se F fosse definito in $\mathbb{R}^3$ ma non dipendesse da z e la sua terza componente fosse identicamente nulla. Applicando la (5.2), si trova

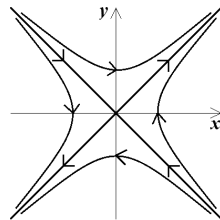
$$\text{rot} F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k \quad \forall F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \quad (5.3)$$

e quindi il rotore è perpendicolare al piano del campo. Proprio la versione bidimensionale permette di capire il significato del rotore.

Esempio 5.5. Consideriamo i tre campi $F(x, y) = (y, x)$, $G(x, y) = (-y, x)$, $H(x, y) = (y, -x)$. Risulta

$$\nabla \wedge F(x, y) = 0k, \quad \nabla \wedge G(x, y) = 2k, \quad \nabla \wedge H(x, y) = -2k.$$

Le linee di campo di F sono i rami delle iperboli di equazione $x^2 - y^2 = c$, si veda la figura accanto per il verso delle linee di flusso.



Le linee di campo di G sono circonferenze percorse in senso antiorario, vedi Esempio 5.4. Analogamente, le linee di campo di $H = -G$ sono circonferenze percorse in senso orario.

Questo esempio mostra come il modulo del rotore misuri la *tendenza a ruotare* (e a formare un gorgo) attorno all'asse della sua direzione. Anche per campi tridimensionali il rotore individua una direzione che è perpendicolare al piano che localmente tende a contenere le linee di campo. Se queste linee di campo tendono ad avvolgersi attorno all'asse, il rotore avrà il verso della vite che ruota nel verso delle linee di campo. Se, come nel caso del campo F , il rotore fosse nullo, significa che non c'è effetto rotatorio, le linee di flusso diventano dei “canali che portano acqua e che poi la tolgono” come nella figura qui sopra.

Chiamiamo **divergenza** di un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ lo scalare

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Un campo a divergenza nulla viene chiamato **solenoidale**. Vedremo più avanti (Paragrafo 5.8) il significato fisico di questo operatore differenziale. La divergenza si definisce per ogni dimensione $n \geq 1$ e, se $n = 1$, coincide con la derivata di una funzione scalare.

Componendo questi (e altri) operatori si possono ottenere operatori differenziali del second'ordine. Bisogna però stare attenti alle dimensioni. Vediamo alcune identità differenziali relative a gradiente, divergenza, rotore e Laplaciano (cfr. (3.10)) in Ω , insieme aperto di $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla \wedge (\nabla u) = \operatorname{rot} (\nabla u) = 0 \quad \forall u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}), \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge F) = \operatorname{div} (\operatorname{rot} F) = 0 \quad \forall F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \operatorname{div} (\nabla u) = \Delta u \quad \forall u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}).$$

Le prime due identità si leggono *un gradiente è irrotazionale* e *un rotore è solenoidale*. Inoltre, sono conseguenze immediate del Teorema di Schwarz (Teorema 3.24) che, di fatto, vincola tra di loro le derivate seconde di una funzione di più variabili.

5.2 Lavoro di un campo vettoriale

Una delle più importanti quantità fisiche legate a un campo di forza è il *lavoro*. Sostanzialmente, il lavoro è dato dalla forza per lo spostamento.

Definizione 5.6. Sia γ il sostegno orientato di una curva regolare a tratti $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sia $F \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Si chiama **lavoro** di F lungo γ l'integrale di linea

$$L_\gamma(F) = \int_\gamma F \cdot dr = \int_I F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Sia $I = [a, b]$; da un punto di vista fisico, il valore $L_\gamma(F)$ rappresenta il lavoro che compie la forza F per spostare il suo punto di applicazione lungo γ da $r(a)$ a $r(b)$.

Esempio 5.7. Si consideri la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$ e il campo $F(x, y) = (x^2, y^2)$. Il lavoro di F lungo il sostegno di r è dato da

$$L = \int_0^\pi \left(\cos^2 t (-\sin t) + \sin^2 t (\cos t) \right) dt = -\frac{2}{3}.$$

Trattandosi di un integrale di linea, viene spontaneo confrontare la Definizione 2.12 con la Definizione 5.6. La principale differenza sta nel cambio del verso di percorrenza: mentre l'integrale di linea *non cambia* se riparametrizziamo la curva con verso opposto (la presenza di $|r'(t)|$ dice proprio che conta solo il modulo di r'), l'integrale che serve per il calcolo del lavoro *cambia segno* se la curva cambia verso. Se al posto di r nell'Esempio 5.7 prendiamo $\rho(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$, $t \in [0, \pi]$, il sostegno cambia orientazione e il lavoro di F cambia segno diventando $\frac{2}{3}$.

La parola “integrale” fa venire subito in mente la parola “primitiva”: ci chiediamo se sia possibile calcolare un lavoro mediante un opportuno calcolo di una primitiva, come per il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Come vedremo, la risposta è affermativa solo se si verifica una certa condizione. Quale può essere una definizione ragionevole di primitiva? Per rispondere, prendiamo ancora spunto dalla fisica.

Definizione 5.8. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Diremo che F è **conservativo** se esiste una funzione reale $U \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, che chiameremo **potenziale** di F , tale che $\nabla U = F$.

Pertanto, se esiste, il potenziale U ha derivate parziali che coincidono con le componenti del campo F : dato che ∇U indica la direzione di massima salita per U (vedere la (3.8) e la discussione successiva), possiamo attribuire a $-U$ il significato di *energia potenziale* associata al campo F . Sempre se esiste, il potenziale U è unico a meno di una costante additiva. Nel caso $n = 1$, ogni funzione C^1 (anzi, basta C^0) è conservativa dato che ammette una primitiva. Ma nella Definizione 5.8 le parole “se esiste” fanno venire il sospetto che la

cosa possa non essere sempre vera per $n \geq 2$. In effetti, dalla (5.4) ricaviamo l'implicazione

$$F \text{ conservativo} \implies F \text{ irrotazionale} \quad (5.6)$$

la cui contronominale permette di enunciare la

Proposizione 5.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se F non è irrotazionale allora non è conservativo.*

La Proposizione 5.9 può apparire sorprendente: afferma che se la “derivata” (che è un vettore) di un campo non soddisfa una certa proprietà allora il campo non ammette una “primitiva” (il potenziale). Come già osservato, questo vincolo è una conseguenza diretta del Teorema 3.24 (di Schwarz). Per esempio, il semplice campo piano $F(x, y) = (y^2, x^2)$ non ammette potenziale dato che $\text{rot} F = 2(x - y)k \neq 0$.

Per capire l'importanza dei campi conservativi ripartiamo dalla Definizione 5.8. Sia γ il sostegno orientato di una curva regolare a tratti $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sia $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un campo conservativo e sia $U \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ un suo potenziale. Per la Definizione 5.8 e per la (3.3), il lavoro di F lungo γ è dato da

$$L_\gamma(F) = \int_a^b \nabla U(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(r(t)) dt = U(r(b)) - U(r(a)) \quad (5.7)$$

dove abbiamo integrato la derivata di una funzione composta. La (5.7) esprime il fatto che **il lavoro di un campo conservativo si calcola come differenza di potenziale** tra il punto finale e il punto iniziale della curva. Inoltre, nel risultato della (5.7) è “scomparso” il sostegno: questo significa che **il lavoro di un campo conservativo non dipende dalla curva di percorrenza ma solo dai suoi estremi**, se il punto di applicazione del campo percorresse qualunque altra curva regolare ρ tale che $\rho(a) = r(a)$ e $\rho(b) = r(b)$ il lavoro sarebbe sempre lo stesso. In particolare, spezzando una curva chiusa in qualunque due suoi punti, vediamo che il lavoro di un campo conservativo lungo il sostegno di una curva chiusa è nullo. Riassumiamo quanto appena visto nel seguente

Teorema 5.10. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; un campo $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ è conservativo se e solo se vale una delle condizioni seguenti (equivalenti tra di loro):*

- (i) *il lavoro di F lungo un qualunque sostegno orientato γ si esprime tramite la (5.7);*
- (ii) *il lavoro di F lungo il sostegno orientato di qualunque coppia di curve coincidenti agli estremi è uguale;*
- (iii) *il lavoro di F lungo il sostegno di una qualunque linea chiusa è nullo.*

La (5.6) suggerisce implicitamente una domanda: vale anche il viceversa? Cioè, un campo irrotazionale è sempre conservativo? Una risposta affermativa sarebbe molto utile, consentirebbe di verificare che un certo campo ammette un potenziale solo controllando alcune proprietà delle sue derivate. E sappiamo

bene che derivare è più semplice che integrare. Purtroppo, la risposta è in generale negativa anche se, con qualche accorgimento, si riesce a renderla affermativa. All'uopo è preziosa la seguente

Definizione 5.11. *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice **semplicemente connesso** se ogni linea chiusa $\gamma \subset \Omega$ è contraibile in Ω a un punto di Ω .*

In altre parole, partendo da una linea chiusa $\gamma \subset \Omega$ deve essere possibile contrarla (restringerla) fino a ridursi a un punto e questo deve avvenire sempre rimanendo all'interno di Ω .

Esempio 5.12. *Il disco unitario $D \subset \mathbb{R}^2$ privato dell'origine non è semplicemente connesso. La sfera unitaria $B \subset \mathbb{R}^3$ privata dell'origine è semplicemente connessa. La sfera unitaria $B \subset \mathbb{R}^3$ privata di una sua corda non è semplicemente connessa.*

Questo esempio deve far riflettere sia sul significato di “semplicemente connesso” sia sul ruolo dei punti in dipendenza dalla dimensione. In parole povere, un insieme semplicemente connesso è un insieme che “non ha buchi di dimensione troppo grande”. In dimensione $n = 2$ basta un buco riducibile a un punto per far perdere questa proprietà. In dimensione $n = 3$ un punto non basta ma ci vuole un buco simile a un segmento.

Possiamo adesso invertire la (5.6):

Teorema 5.13. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un insieme semplicemente connesso e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora*

$$F \text{ irrotazionale} \iff F \text{ conservativo.}$$

Se l'insieme non è semplicemente connesso l'equivalenza può non valere.

Esempio 5.14. *L'insieme $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso. Consideriamo la curva chiusa definita da $r(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$. Il sostegno γ della curva non è contraibile a un punto, dato che l'origine sta nel mezzo. Consideriamo il campo*

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

e osserviamo che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e quindi F è irrotazionale. D'altra parte, il lavoro di F lungo γ è dato da

$$L_\gamma(F) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (\cos t) \right) dt = 2\pi \neq 0$$

e quindi, per il Teorema 5.10 (iii), il campo F non è conservativo.

Il lettore diffidente che desidera comunque cercare un potenziale per il campo dell'Esempio 5.14 arriverà sicuramente a pensare che $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ possa funzionare; il problema è che tale funzione U è definita per $x \neq 0$ e “non consente al punto mobile di girare intorno all'origine”. L'Esempio 5.14 sembra chiudere la vicenda. Tuttavia, come vediamo dal prossimo esempio, la situazione è ancora più delicata.

Esempio 5.15. *L'insieme $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso. Consideriamo il campo*

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

e poniamo $U(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$. Si verifica che $U_x = F_1$ e $U_y = F_2$; pertanto, U è un potenziale di F che risulta quindi essere conservativo. In questo caso, malgrado la presenza di un punto singolare, siamo riusciti a determinare un potenziale che “consente di girargli intorno”.

Questo esempio mostra come anche il Teorema 5.13 fornisca solo una condizione sufficiente: non è necessario che un insieme sia semplicemente connesso affinché un campo irrotazionale sia conservativo. Un campo irrotazionale è sempre *localmente* conservativo: se non si pretende che questo sia vero su tutto l'insieme considerato, si riesce sempre a ritagliare una zona (locale) dove un campo irrotazionale è anche conservativo. Nell'Esempio 5.14, il candidato potenziale $U(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ è tale nei semipiani $\{x > 0\}$ e $\{x < 0\}$. Tutto quanto esposto in questo paragrafo può sembrare uno scioglilingua: il lettore non si scoraggi e provi a rileggerlo tutto di fila varie volte, sapendo dove si vuole arrivare è più facile capire la teoria.

All'atto pratico, per capire se un campo è conservativo, si controlla subito se è irrotazionale. Se non lo fosse, la Proposizione 5.9 permette di concludere che il campo non è conservativo e, per calcolare il suo lavoro, dobbiamo necessariamente usare la Definizione 5.6. Se invece il campo fosse irrotazionale, dobbiamo vedere se il dominio dove è definito è semplicemente connesso: se lo fosse, allora il campo sarebbe conservativo, se invece non lo fosse non potremmo concludere nulla a priori, saremmo costretti a “provare” a costruire un potenziale.

Vediamo allora come si può procedere per trovare un potenziale di un campo conservativo; analizzeremo solo il caso $n = 3$ dato che $n = 2$ è analogo e più semplice. Per un campo $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, cerchiamo una funzione $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tale che

$$U_x(x, y, z) = F_1(x, y, z), \quad U_y(x, y, z) = F_2(x, y, z), \quad U_z(x, y, z) = F_3(x, y, z). \quad (5.8)$$

La prima delle (5.8) suggerisce di integrare $F_1(x, y, z)$ rispetto a x . Trattandosi di un integrale indefinito, ci aspettiamo che compaia una costante additiva di

integrazione. Ma, dato che stiamo integrando rispetto a x , la “costante” può dipendere sia da y che da z :

$$U(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx + \phi_1(y, z).$$

Analogamente si procede con la seconda e la terza delle (5.8):

$$U(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy + \phi_2(x, z), \quad U(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz + \phi_3(x, y).$$

Abbiamo così trovato 3 diverse forme per il potenziale U ; se riuscissimo a determinare una funzione che si possa esprimere *contemporaneamente* in queste 3 forme, quella sarebbe un potenziale.

Esempio 5.16. *Si consideri il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (6x + yz + 2xe^{x^2+y^2})i + (xz + 2ye^{x^2+y^2})j + (xy + 1)k.$$

Si ha $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Inoltre

$$\text{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x, y, z) & F_2(x, y, z) & F_3(x, y, z) \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Il campo F è quindi irrotazionale. Essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, F è anche conservativo e il suo lavoro si esprime come differenza di potenziale. Un potenziale di F è dato da

$$U(x, y, z) = \int F_1(x, y, z) dx = 3x^2 + xyz + e^{x^2+y^2} + \phi_1(y, z),$$

$$U(x, y, z) = \int F_2(x, y, z) dy = xyz + e^{x^2+y^2} + \phi_2(x, z),$$

$$U(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz = xyz + z + \phi_3(x, y).$$

Raccogliendo i termini si ottiene $U(x, y, z) = 3x^2 + xyz + e^{x^2+y^2} + z$. Per calcolare il lavoro che compie il campo F quando il suo punto di applicazione si sposta lungo il segmento di estremi $A(0, 0, 0)$ e $B(0, 0, 1)$, basta usare la (5.7): il lavoro cercato è $L = U(B) - U(A) = 1$.

Esercizio 5.17. *Dimostrare che il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (e^{x+y} + e^{x+z})i + (e^{x+y} + 1)j + (e^{x+z} + 1)k$$

è conservativo in $\mathbb{R}^3$. Calcolare poi il lavoro del campo lungo il segmento orientato che unisce i punti $A(0, 0, 0)$ e $B(1, -1, 1)$.

Si ha $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Inoltre

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x, y, z) & F_2(x, y, z) & F_3(x, y, z) \end{vmatrix} = (\quad , \quad , \quad).$$

Il campo F è conservativo perchè risulta essere $\quad$ e l'insieme dove è definito risulta essere $\quad$.

Un potenziale di F è dato da $U(x, y, z) = \quad$ e quindi il lavoro cercato vale $L = U(B) - U(A) = e^2 - 1$.

Forme differenziali lineari. Nel calcolo del lavoro di un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ci imbattiamo in integrande del tipo

$$F \cdot dr = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

nel caso $n = 3$ e con solo i primi due addendi nel caso $n = 2$. Un'espressione di questo tipo prende il nome di *forma differenziale lineare*. Il lavoro si esprime quindi come integrale di linea di una forma differenziale lineare. Se F è conservativo, esiste un potenziale $U \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che $\nabla U = F$ e cioè

$$dU = U_x dx + U_y dy + U_z dz = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz;$$

in questo caso, la forma differenziale coincide con il differenziale di U e viene chiamata *forma differenziale esatta*. La forma differenziale che corrisponde a un campo irrotazionale viene invece chiamata *forma differenziale chiusa*. Per quanto visto in questo paragrafo, ogni forma differenziale esatta è anche chiusa mentre il viceversa non è sempre vero; vale sicuramente se il campo F è definito in un insieme semplicemente connesso.

5.3 Superfici in forma parametrica

In questo paragrafo analizzeremo i campi vettoriali da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Dato un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, consideriamo dunque funzioni continue del tipo

$$\Sigma : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (x, y, z) \end{array} \quad \Sigma \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. \quad (u, v) \in \Omega. \quad (5.9)$$

Un campo vettoriale da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ viene chiamato **superficie in forma parametrica**. Un'immagine che ben descrive questi campi vettoriali è quella di un fazzoletto di stoffa sottile appoggiato sul piano che si solleva dal piano per via di un soffio d'aria proveniente da sotto al piano, si veda la Figura 5.3. Questa immagine generalizza quella di una funzione di due variabili: non è detto che la proiezione di Σ sul piano coincida con Ω e non è nemmeno detto che il fazzoletto deformato rappresenti il grafico di una funzione $z =$

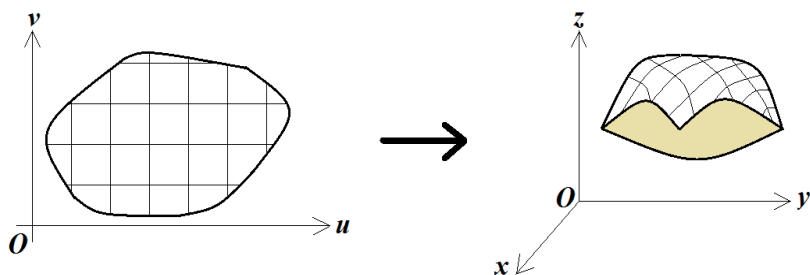


Figura 5.3: Superficie in forma parametrica.

$f(x, y)$. Il fazzoletto potrebbe ripiegarsi su se stesso e potrebbero esistere $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ tali che $\Sigma(u_1, v_1) = (x_1, y_1, z_1)$ e $\Sigma(u_2, v_2) = (x_1, y_1, z_2)$ con $z_2 \neq z_1$; questo significherebbe che sulla verticale del punto (x_1, y_1) ci sono due punti del fazzoletto deformato che, quindi, non può rappresentare una funzione $z = f(x, y)$. Inoltre, il fazzoletto potrebbe “richiudersi” e formare una sfera o una superficie “chiusa”. Potrebbe poi avvitarsi, ecc... le patologie sono infinite. La superficie Σ in (5.9) si dice **semplice** se è iniettiva da Ω (insieme aperto) in $\Sigma(\Omega)$. Una superficie semplice si dice **chiusa** se l'insieme $\Sigma(\overline{\Omega})$ separa lo spazio $\mathbb{R}^3$ in due regioni sconnesse: per passare con continuità da una regione all'altra si deve intersecare la frontiera $\partial\Sigma(\Omega)$ di $\Sigma(\Omega)$.

Nella Figura 5.3 sono rappresentate le linee coordinate nel piano (u, v) nel disegno di sinistra e le loro deformate nel disegno di destra. Un esempio simile è quello di un mappamondo con disegnati meridiani e paralleli, si veda la Figura 5.4. Quella rappresentata è una situazione ideale dove gli angoli retti nel piano di partenza vengono deformati in angoli che non sono né piatti né nulli. È proprio questo il “rischio” che corre una superficie. Vediamo dunque di definirlo rigorosamente.

Se le funzioni che caratterizzano la superficie in forma parametrica (5.9) sono di classe C^1 , la funzione Σ ammette 6 derivate: $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$. Se teniamo fisso u e facciamo variare v , una linea verticale del disegno di sinistra in Figura 5.3 si trasforma in una delle linee sulla superficie del disegno di destra. Questa nuova linea ammette un vettore tangente dato da (x_v, y_v, z_v) , a condizione che questo vettore sia non nullo. Analogamente, tenendo fissa la v e facendo variare la u , il trasformato di un segmento del tipo $v = v_0$ con $a \leq u \leq b$ è una linea che ammette vettore tangente (x_u, y_u, z_u) , a condizione che questo vettore sia non nullo. Pertanto, la prima richiesta che dobbiamo fare è che entrambi i “vettori derivati” siano non nulli: questo garantisce che le linee trasformate dei segmenti orizzontali e verticali siano regolari. Ma questa richiesta non è sufficiente per evitare altri inconvenienti. Vorremmo infatti che gli angoli retti non degenerassero in angoli piatti o nulli; vorremmo cioè che i vettori $\Sigma_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $\Sigma_v = (x_v, y_v, z_v)$ non fossero proporzionali. Questa

richiesta si traduce nel non annullamento del loro prodotto vettoriale:

$$\Sigma_u(u, v) \wedge \Sigma_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \neq (0, 0, 0) \quad \forall (u, v) \in \Omega. \quad (5.10)$$

Definizione 5.18. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e sia $\Sigma \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ una superficie in forma parametrica. Diremo che Σ è una **superficie regolare** se vale la (5.10).

Questa definizione va confrontata con la Definizione 2.5. Entrambe richiedono che la funzione sia di classe C^1 nell'insieme *aperto* e che le loro derivate siano ivi non nulle in un senso opportuno; niente è richiesto sulla frontiera dell'aperto. Se in qualche punto di Ω venisse violata la (5.10), il punto viene chiamato *singolare* per la superficie Σ . L'importanza della condizione (5.10) è ben illustrata geometricamente. Se vale la (5.10), i vettori Σ_u e Σ_v sono linearmente indipendenti e, insieme al punto $\Sigma(u, v)$, definiscono un piano che è il piano tangente alla superficie; ecco l'analogia con la Definizione 2.5. Una volta definito il piano tangente, il vettore $\Sigma_u \wedge \Sigma_v$ risulta essere perpendicolare a questo piano. Pertanto, il vettore

$$n = \frac{\Sigma_u \wedge \Sigma_v}{|\Sigma_u \wedge \Sigma_v|} \quad (5.11)$$

è uno dei due versori *normali* alla superficie; l'altro è ovviamente $-n$.

Esempio 5.19. Sia Ω il dominio del piano (u, v) compreso tra le rette di equazione $u + v = \pm 1$ e $u - v = \pm 1$. Verifichiamo che la superficie Σ definita in forma parametrica dalle equazioni

$$\Sigma \quad \begin{cases} x = u^2 \\ y = u + v \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

è semplice e regolare. L'applicazione $(u, v) \mapsto (x, y, z)$ è di classe C^∞ . Inoltre,

$$\Sigma_u = (2u, 1, 0), \quad \Sigma_v = (0, 1, 1) \implies \Sigma_u \wedge \Sigma_v = (1, -2u, 2u) \neq (0, 0, 0) :$$

la superficie Σ è quindi regolare. Da $z(u_1, v_1) = z(u_2, v_2)$ ricaviamo $v_1 = v_2$; ma allora, da $y(u_1, v_1) = y(u_2, v_2)$ ricaviamo $u_1 = u_2$: l'applicazione $(u, v) \mapsto (x, y, z)$ è iniettiva e Σ è semplice.

Concludiamo questo paragrafo con due importanti esempi di superfici regolari in forma parametrica. Per $(\phi, \vartheta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ la superficie

$$\Sigma(\phi, \vartheta) = (R \sin \phi \cos \vartheta, R \sin \phi \sin \vartheta, R \cos \phi) \quad (5.12)$$

rappresenta la sfera centrata nell'origine e di raggio R , si veda la Figura 5.4. Questa superficie è semplice e regolare. Il polo nord $(0, 0, R)$ ha le in-

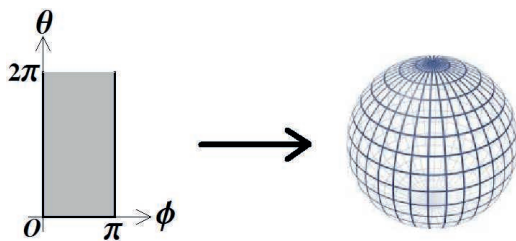


Figura 5.4: Sfera in forma parametrica.

finite controimmagini $(0, \vartheta)$ per ogni ϑ ma, essendo questi punti sulla frontiera, non compromettono la semplicità della superficie. Anche il polo sud $(0, 0; -R)$ ha infinite controimmagini, i punti (π, ϑ) per ogni ϑ . Risulta $\Sigma_\phi = (R \cos \phi \cos \vartheta, R \cos \phi \sin \vartheta, -R \sin \phi)$ e $\Sigma_\vartheta = (-R \sin \phi \sin \vartheta, R \sin \phi \cos \vartheta, 0)$. Pertanto,

$$\Sigma_\phi \wedge \Sigma_\vartheta = R^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \vartheta, \sin \phi \sin \vartheta, \cos \phi)$$

che fornisce $n = (\sin \phi \cos \vartheta, \sin \phi \sin \vartheta, \cos \phi) = \Sigma(\phi, \vartheta)/R$; questo ci dice che la normale è uscente perpendicolarmente dalla sfera e che, giustamente, ha la stessa direzione del raggio incidente.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto. Abbiamo già osservato come il grafico di una funzione di due variabili $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $z = f(x, y)$, sia una particolare superficie in forma parametrica. Si pone

$$\Sigma(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (5.13)$$

da cui, $\Sigma_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y))$ e $\Sigma_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$. Di conseguenza, $\Sigma_x \wedge \Sigma_y = (-f_x, -f_y, 1)$ che non si annulla mai: quindi, il grafico di una funzione C^1 di due variabili è una superficie regolare e semplice (questa proprietà è elementare). Un vettore normale alla superficie è dato da

$$n = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}; \quad (5.14)$$

questo vettore è orientato verso l'alto.

5.4 Formula di Gauss-Green nel piano

Per introdurre il concetto di integrale di superficie è bene partire dal caso di superfici piane. Nei prossimi paragrafi vedremo poi cosa succede quando queste superfici piane si deformano “incurvandosi”. Il principio è quello di ridurre un integrale di una dimensione.

Dato un insieme piano $D \subset \mathbb{R}^2$, vogliamo *orientare* la sua frontiera ∂D e cioè definire positivo uno dei due versi di percorrenza. Diremo che ∂D è

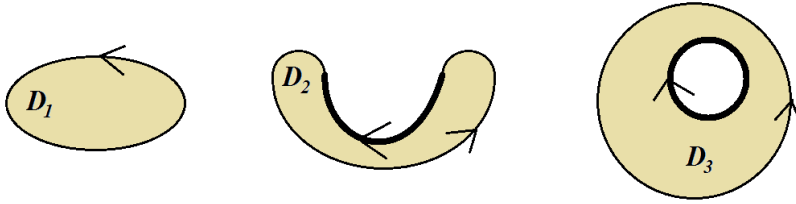


Figura 5.5: Orientazione della frontiera di domini piani.

orientata positivamente se muovendosi lungo ∂D l'insieme D rimane sulla sinistra, vedi Figura 5.5. Viene la tentazione di dire che il verso positivo sia quello antiorario ma, come vediamo nelle parti in grassetto di ∂D_2 e ∂D_3 in Figura 5.5, questo non sarebbe corretto. Indicheremo la frontiera orientata positivamente con $\partial^+ D$; l'orientazione opposta viene chiamata negativa e indicata con $\partial^- D$.

Consideriamo un aperto semplice rispetto a y (cfr. Definizione 4.1):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, g(x) < y < h(x)\}$$

con $a < b$ e $g, h \in C^0[a, b]$ tali che $g < h$ su (a, b) , si veda la Figura 5.6. Sia

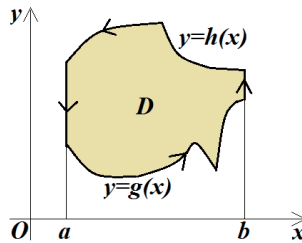


Figura 5.6: Insieme semplice rispetto a y con frontiera orientata positivamente.

poi $P \in C^1(\overline{D})$; il Teorema 4.3 consente di calcolare

$$\int_D P_y(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} P_y(x, y) dy \right] dx = \int_a^b [P(x, h(x)) - P(x, g(x))] dx.$$

Abbiamo ridotto di una dimensione l'integrale da calcolare ma non siamo ancora soddisfatti. Dato che x non varia sulle parti verticali di ∂D (che ci sono nella Figura 5.6 ma che potrebbero anche non esserci), avremo che $dx = 0$ su queste parti. Ma allora, calcolando l'integrale di linea sul bordo orientato, otteniamo

$$\int_{\partial^+ D} P(x, y) dx = \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, h(x))] dx$$

dove il segno $-$ dipende dal fatto che sulla parte superiore di D (corrispondente al grafico di h) il verso di percorrenza è da destra a sinistra, si veda ancora la Figura 5.6. Mettendo insieme queste due equazioni, risulta dimostrata la relazione

$$\int_D P_y(x, y) dx dy = - \int_{\partial^+ D} P(x, y) dx. \quad (5.15)$$

Sottolineiamo che questa identità è stata ottenuta sfruttando il Teorema fondamentale del calcolo integrale (in dimensione 1): $\int P_y dy = P$. Invertendo il ruolo di x e y , otteniamo che se D è un aperto semplice rispetto a x del tipo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < y < b, g(y) < x < h(y)\}$$

con $a < b$ e $g, h \in C^0[a, b]$ tali che $g < h$ su (a, b) , e se $Q \in C^1(\overline{D})$, allora

$$\begin{aligned} \int_D Q_x(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_{g(y)}^{h(y)} Q_x(x, y) dx \right] dy = \int_a^b [Q(h(y), y) - Q(g(y), y)] dy, \\ \int_D Q_x(x, y) dx dy &= \int_{\partial^+ D} Q(x, y) dy. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Si osservi che, rispetto a (5.15), è cambiato un segno; invitiamo il lettore a ripercorrere la medesima dimostrazione per convincersi che la (5.16) è corretta.

Dato che nelle (5.15)-(5.16) non compaiono esplicitamente le funzioni g e h che caratterizzano ∂D , nel caso in cui D sia semplice sia rispetto a x che rispetto a y possiamo scrivere

$$\int_D [Q_x(x, y) - P_y(x, y)] dx dy = \int_{\partial^+ D} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] \quad \forall P, Q \in C^1(\overline{D}). \quad (5.17)$$

Infine, se D è l'unione di un numero finito di insiemi semplici sia rispetto a x che rispetto a y , allora possiamo usare la (4.4) per quanto riguarda i singoli domini semplici che formano D e il fatto che le “frontiere di raccordo” vengono percorse in entrambi i versi e quindi gli integrali corrispondenti si elidono. In sostanza, per ogni aperto D che sia l'unione di un numero finito di domini semplici sia rispetto a x che rispetto a y vale la (5.17). Il lettore rifletta attentamente sul significato della (5.17) nel caso in cui D sia come D_3 nella Figura 5.5, in particolare nel caso in cui D sia una corona circolare.

La (5.17) è la forma più generale della **Formula di Gauss-Green** nel piano. In alcuni casi, può essere conveniente usare versioni particolari, per esempio prendendo $P = 0$ oppure $Q = 0$.

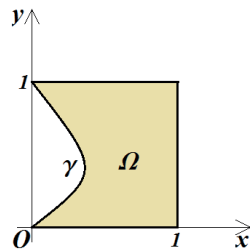
Esempio 5.20.

Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$x(t) = t \cos t, \quad y(t) = \sin t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}).$$

Sia Ω l'insieme rappresentato a destra. Calcoliamo

$$I = \int_{\Omega} y dx dy.$$



Gli altri tre lati di Ω si parametrizzano come segue

$$x = t, y = 0; \quad x = 1, y = t; \quad x = t, y = 1; \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Sul primo e sul terzo risulta $dy = 0$ mentre su γ risulta $dy = \cos t dt$; pertanto, (attenzione al segno!) per la (5.16),

$$I = \int_0^1 t dt + \int_{\pi/2}^0 t \cos^2 t \sin t dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{t \cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 t}{3} dt = \frac{5}{18}.$$

La Formula di Gauss-Green (5.17) può anche essere usata per il calcolo dell'area $A(D)$ di D . Prendendo rispettivamente le coppie $(P(x, y), Q(x, y)) \in \{(-y, 0); (0, x); (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})\}$, dalla (5.17) otteniamo

$$A(D) = \int_D dx dy = - \int_{\partial^+ D} y dx = \int_{\partial^+ D} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} [x dy - y dx]. \quad (5.18)$$

Esempio 5.21. Sia D la regione piana interna a una curva chiusa regolare in forma polare $\rho = \rho(\vartheta) > 0$ con $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Allora, possiamo parametrizzare $\partial^+ D$ come in (2.3). Dalla terza delle (5.18) ricaviamo

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(t) dt.$$

Esercizio 5.22. Calcolare l'area A del cappio del folium di Cartesio dell'Esempio 2.3, di equazioni parametriche

$$x = t(t-1), \quad y = t(t-1)(2t-1), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Per usare la terza delle (5.18) dobbiamo valutare

$$x dy - y dx =$$

Poi si ottiene

$$A =$$

5.5 Integrali di superficie

Nel Paragrafo 4.1 abbiamo visto come si può integrare una funzione di due variabili in un dominio piano. Nel Paragrafo 5.4 abbiamo visto come un tale integrale si possa ridurre a un integrale monodimensionale. Vogliamo qui estendere questi calcoli al caso in cui il dominio piano sia “deformato” e cioè vogliamo integrare su una superficie in forma parametrica, si veda il Paragrafo 5.3. Le motivazioni per effettuare questi calcoli sono molteplici: il calcolo dell'area di una superficie “curva”, il calcolo della massa di una sostanza adagiata sulla superficie, il calcolo della carica elettrica di una superficie con densità di carica data, il calcolo del flusso di un fluido attraverso la superficie.

Data una superficie regolare Σ , cfr. Definizione 5.18,

$$\Sigma : \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (x, y, z) \end{array} \quad \Sigma \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right. \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (5.19)$$

ci chiediamo come si possa calcolare la sua area. Naturalmente, possiamo integrare la funzione costante 1 sulla superficie stessa:

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} dS$$

dove dS rappresenta l'elemento d'area sulla superficie Σ . Con ragionamenti analoghi a quelli già visti per i cambi di variabile in $\mathbb{R}^2$, si veda il Paragrafo 4.2 e la (4.11), si deduce che l'elemento d'area è dato da

$$dS = |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| \, du dv. \quad (5.20)$$

Poiché la superficie è regolare, l'elemento d'area (5.20) non si annulla mai in Ω . Di conseguenza, l'area della superficie Σ definita in (5.19) è data da

$$A(\Sigma) = \int_{\Omega} |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| \, du dv. \quad (5.21)$$

Il primo esempio di calcolo riguarda la sfera.

Esempio 5.23. *Calcoliamo l'area di una superficie sferica S_R di raggio $R > 0$. Posto $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, si ha $(\phi, \vartheta) \in \Omega$ e la parametrizzazione di S_R è data da (5.12); pertanto, $|\Sigma_{\phi} \wedge \Sigma_{\vartheta}| = R^2 \sin \phi$. Inserendo questa informazione nella (5.21), otteniamo*

$$A(S_R) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin \phi \, d\phi \, d\vartheta = 4\pi R^2.$$

L'altro esempio importante studiato nel Paragrafo 5.3 riguarda i grafici delle funzioni di due variabili, $z = f(x, y)$. Possiamo parametrizzare Σ come in (5.13) e ottenere $|\Sigma_x \wedge \Sigma_y| = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$. Per la (5.21), l'area della superficie Σ rappresentante il grafico di $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \Omega$ vale

$$A(\Sigma) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2} \, dx dy.$$

Esempio 5.24. *L'area della superficie sferica Σ di raggio $R > 0$ è il doppio dell'area dell'emisfero nord di equazione $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Poiché*

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

detto D il disco piano di raggio R e passando in coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= 2 \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{R \rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\rho \, d\vartheta = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Nel caso generale si deve invece usare la (5.21).

Esercizio 5.25. Sia $\Omega = (0, \frac{\pi}{2})^2$; data la superficie $\Sigma(u, v) = (\cos u \cos v + \cos v, v, \cos v)$, con $(u, v) \in \Omega$, calcolare l'area di Σ . Risulta

$$\Sigma_u(u, v) = (\quad, 0, 0), \quad \Sigma_v(u, v) = (\quad, 1, \quad).$$

Pertanto, $|\Sigma_u \wedge \Sigma_v| = \quad$ e, con il cambio di variabile $\sin v = \sinh t$, si trova

$$A(\Sigma) = \int_{\Omega} |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| \, du dv =$$

$$= \quad = \frac{\log(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{2}.$$

Nel Paragrafo 2.3 abbiamo prima calcolato la lunghezza di una curva regolare e poi gli integrali di linea. In questo paragrafo, dopo avere calcolato l'area di una superficie regolare, vogliamo calcolare gli integrali di superficie. Per analogia, appare logica la seguente

Definizione 5.26. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia (5.19) una superficie regolare. Sia F una funzione continua in una regione dello spazio $\mathbb{R}^3$ che contiene Σ . Chiamiamo **integrale di superficie** di F su Σ la quantità

$$\int_{\Sigma} F(x, y, z) \, dS = \int_{\Omega} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| \, du dv.$$

Nel caso delle superfici in forma cartesiana, $z = f(x, y)$, si usa l'elemento d'area $\sqrt{1 + |\nabla f|^2}$.

Esercizio 5.27. Sia Ω la regione del piano $z = 0$ compresa nel primo quadrante e delimitata dalle rette di equazioni $y = x$ e $y = 2$ e dalle iperboli di equazioni $xy = 1$ e $xy = 2$; sia S la superficie di equazione $z = y^2$ che si proietta ortogonalmente in Ω . Calcolare

$$I = \int_S \frac{1}{y} \sqrt{\frac{z + \frac{x}{4}(x - 4y)}{1 + 4y^2}} \, dS.$$

Risulta $dS = \quad$ e quindi

$$I = \int_{\Omega}$$

$$= \quad = \frac{11}{32}.$$

Per calcolare il *baricentro* e il *momento di inerzia* di una superficie, prendiamo spunto dalle (4.6) e (4.7). Sia dunque $\Sigma = \Sigma(u, v)$, con $(u, v) \in \Omega$, una superficie regolare con una densità superficiale di massa $d = d(x, y, z)$: generalizzando la (4.5), deduciamo che la superficie avrà massa totale

$$m = \int_{\Sigma} d(x, y, z) dS = \int_{\Omega} d(\Sigma(u, v)) |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| dudv.$$

Le coordinate del baricentro si ottengono con una media pesata del tipo (4.6):

$$x_{\Sigma} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} x d(x, y, z) dS = \frac{1}{m} \int_{\Omega} x(u, v) d(\Sigma(u, v)) |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| dudv,$$

$$y_{\Sigma} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} y(u, v) d(\Sigma(u, v)) |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| dudv,$$

$$z_{\Sigma} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} z(u, v) d(\Sigma(u, v)) |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| dudv.$$

Per il calcolo del momento di inerzia, supponiamo che sia nota la distanza $\delta(x, y, z)$ di ogni punto $(x, y, z) \in \Sigma$ dall'asse di rotazione; in tal caso, il momento di inerzia vale

$$I = \int_{\Omega} \delta^2(\Sigma(u, v)) d(\Sigma(u, v)) |\Sigma_u \wedge \Sigma_v| dudv.$$

Lasciamo al lettore di semplificare queste formule nel caso di superfici omogenee ovvero con densità di massa costante, $d(x, y, z) \equiv d$.

5.6 Superfici orientate e flusso

Per le superfici ha anche un grande interesse fisico il concetto di flusso di un campo vettoriale che le attraversa. Sappiamo che il lavoro di un campo dipende dal verso di percorrenza del suo punto di applicazione sul sostegno di una linea. Analogamente, per parlare di flusso, dobbiamo prima stabilire un *verso positivo di attraversamento* della superficie. Abbiamo già osservato come una superficie regolare ammetta due versori normali, quello definito in (5.11) e il suo opposto. La scelta dell'ordine di derivazione fornisce l'uno o l'altro verso: calcolare $\Sigma_u \wedge \Sigma_v$ o $\Sigma_v \wedge \Sigma_u$ comporta, appunto, una differenza di segno. Orientare una superficie significa scegliere uno dei due versori normali. Ma c'è prima un problema da risolvere.

Definizione 5.28. Una superficie regolare Σ si dice *orientabile* se è possibile definire in ogni suo punto un versore normale (che varia con continuità sulla superficie) tale che per ogni linea chiusa contenuta in Σ i punti iniziali e finali abbiano lo stesso versore normale.

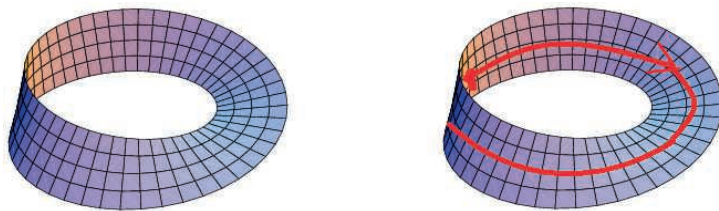


Figura 5.7: Il nastro di Möbius.

Non tutte le superfici sono orientabili. Un celebre esempio di superficie non orientabile è il **nastro di Möbius**, vedi Figura 5.7: nell'immagine di destra vediamo che partendo dal punto rosso e seguendo la linea rossa ritorniamo in corrispondenza del punto di partenza dall'altra parte del nastro.

Se una superficie è orientabile, possiamo orientarla definendo con continuità in ogni suo punto un versore normale che indichi il verso positivo di attraversamento. Se la superficie è chiusa possiamo parlare di versore interno o esterno. Ma se la superficie non è chiusa bisogna definire il suo bordo e questo non è affatto facile. Se Σ è come in (5.19) verrebbe spontaneo chiamare bordo di Σ il trasformato $\Sigma(\partial\Omega)$ del bordo di Ω . Ma questa caratterizzazione sarebbe sbagliata in generale, basta pensare alla sfera definita in (5.12); $\partial\Omega$ è il bordo del rettangolo nel disegno di sinistra della Figura 5.4, mentre la sfera nel disegno di destra non ha bordo visto che è una superficie chiusa. In questo caso, $\Sigma(\partial\Omega)$ consiste in un meridiano (corrispondente a $\vartheta = 0$ e a $\vartheta = 2\pi$) che comprende anche i poli ($\phi = 0$ e $\phi = \pi$).

Ci limiteremo dunque a considerare superfici Σ a **chiusura semplice** e cioè tali che Σ sia iniettiva da $\bar{\Omega}$ (chiusura dell'insieme aperto) in $\Sigma(\bar{\Omega})$. In tal caso, possiamo chiamare **bordo della superficie** l'insieme $\partial\Sigma = \Sigma(\partial\Omega)$. Diremo poi che la superficie è **orientata** se in ogni suo punto è definito (con continuità) un versore normale che sia “compatibile” con l'orientazione del bordo $\partial^+\Sigma$ nel modo seguente: *facendo ruotare n nel verso di $\partial^+\Sigma$ si ottiene il movimento di una vite che ha lo stesso verso di n* , si veda la Figura 5.8.

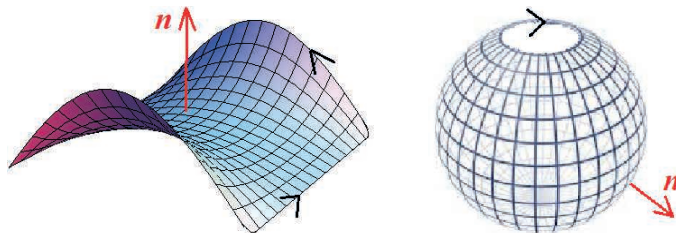


Figura 5.8: Orientazione di una superficie con bordo.

Questa definizione è alquanto “artigianale” ma illustra bene la difficoltà di orientare una superficie regolare in generale. È per questo che ci limitiamo alle superfici a chiusura semplice. Se la superficie fosse piana, la nozione di “avvitamento” sarebbe inequivocabile. Se invece la superficie è un po’ mossa, come nel disegno a sinistra della Figura 5.8, si deve pensare alla sua proiezione su un piano. Se la superficie è “quasi” chiusa, come nella sfera privata della calotta artica nel disegno a destra in Figura 5.8, bisognerebbe prima “allargare” lo squarcio e poi fare la proiezione. Osserviamo che questa porzione di sfera è a chiusura semplice ma che, per vederlo, non possiamo utilizzare la parametrizzazione (5.12) senza cambiare l’insieme $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$: infatti, con questo insieme, avremmo che $\Sigma(\phi, 0) = \Sigma(\phi, 2\pi)$ e quindi non sarebbe a chiusura semplice.

Possiamo ora definire il flusso di un campo attraverso una superficie regolare orientata,

Definizione 5.29. *Sia Σ una superficie regolare a chiusura semplice ($\Sigma = \Sigma(u, v)$ con $(u, v) \in \Omega$) orientata dal versore $n = \frac{\Sigma_u \wedge \Sigma_v}{|\Sigma_u \wedge \Sigma_v|}$. Sia F un campo vettoriale di classe C^1 in un intorno di Σ . Chiamiamo **flusso** di F attraverso Σ la quantità*

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, dS = \int_{\Omega} F(\Sigma(u, v)) \cdot (\Sigma_u \wedge \Sigma_v) \, dudv.$$

Osserviamo che nella formula si semplifica un fattore $|\Sigma_u \wedge \Sigma_v|$.

Il flusso di un campo ha diverse applicazioni fisiche; abbiamo già detto del flusso di un fluido attraverso una superficie. Il fatto che si calcoli $F \cdot n$ significa che stiamo valutando solo la “componente efficace” del campo vettoriale: se il campo vettoriale fosse tangente a Σ in ogni suo punto, e cioè Σ fosse formato da linee di campo, allora il suo flusso attraverso Σ sarebbe nullo.

Nel caso particolare di superficie Σ in forma cartesiana, $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \Omega$, se orientiamo la superficie usando il versore normale (5.14), il flusso di un campo $F = F(x, y, z)$ attraverso Σ è dato da

$$\int_{\Omega} [F_3(x, y, f(x, y)) - f_x(x, y)F_1(x, y, f(x, y)) - f_y(x, y)F_2(x, y, f(x, y))] \, dx dy.$$

Esempio 5.30. *Calcoliamo il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, y, z)$ uscente dalla superficie del cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1, -1 < z < 2\}$. Sul “coperchio” C abbiamo $z = 2$ e $n = k$ e dunque $F \cdot n = 2$; passando in coordinate polari,*

$$\int_C F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\rho \, d\rho \, d\vartheta = 2\pi.$$

Sul “fondo” B abbiamo $z = -1$ e $n = -k$; passando in coordinate polari,

$$\int_B F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho \, d\rho \, d\vartheta = \pi.$$

Sulla superficie laterale cilindrica Σ abbiamo $F = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, z)$ e $n = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$; pertanto,

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 dz \, d\vartheta = 6\pi.$$

Il flusso totale uscente è 9π .

5.7 Campi solenoidali e potenziale vettore

Abbiamo già sperimentato alcune forme di derivazione e integrazione di campi vettoriali. Ma proprio perché si tratta di vettori di più variabili, ce ne possono essere altre. Ci chiediamo ora se un campo vettoriale $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ammetta una “primitiva vettoriale” e cioè se esista $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tale che $\text{rot} V = \nabla \wedge V = F$; l’ambito naturale di questa domanda è $n = 3$ mentre nel caso $n = 2$ dobbiamo nuovamente immergere il campo F in $\mathbb{R}^3$ considerando nulla la sua terza componente. Se un tale campo esiste, diremo che V è un **potenziale vettore** di F . Anche qui, l’esistenza di una primitiva (potenziale vettore) dipende da una proprietà delle derivate. In effetti, dalla (5.5) ricaviamo l’implicazione

$$F \text{ ammette potenziale vettore} \implies F \text{ solenoidale} \quad (5.22)$$

la cui contronominale permette di enunciare la

Proposizione 5.31. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se F non è solenoidale allora non ammette potenziale vettore.*

Rispetto al caso dei campi conservativi, la situazione si complica leggermente. Una volta stabilito che un campo è conservativo, sappiamo che ammette un solo potenziale a meno di una *costante* additiva. Nel caso del potenziale vettore, la (5.4) ci dice che, se esiste, è *unico a meno di una somma con campi conservativi*: cioè, se V è un potenziale vettore di F , allora anche $V + \nabla g$ è un potenziale vettore di F per ogni $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Come nel caso del potenziale (scalare), si veda (5.6), ci chiediamo se la (5.22) possa essere invertita. E anche in questo caso, la risposta dipende dalle proprietà del dominio considerato.

Definizione 5.32. *Diciamo che un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) è **stellato** se esiste un punto $P \in \Omega$ tale che per ogni altro punto $M \in \Omega$ il segmento che congiunge P e M è interamente contenuto in Ω .*

Un insieme stellato è un insieme “che si può illuminare con una sola lampadina”, esiste cioè un punto P (centro di stellatura) che “vede” tutti gli altri punti.

Esempio 5.33. *La sfera unitaria $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ è stellata, qualunque suo punto può essere preso come centro di stellatura. La sfera unitaria privata del suo centro (o di un qualunque altro punto) non è stellata.*

Possiamo adesso invertire la (5.22):

Teorema 5.34. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) un insieme stellato e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora*

$$F \text{ solenoidale} \iff F \text{ ammette potenziale vettore.}$$

Ci sono altre ipotesi geometriche sull'insieme Ω che garantiscono la validità del Teorema 5.34, ci siamo qui limitati ad esporne una relativamente semplice. In ogni caso, se l'insieme non è stellato l'equivalenza può non valere.

Esempio 5.35. *L'insieme $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ non è stellato. Consideriamo il campo*

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

e osserviamo che $\nabla \cdot F = 0$ e quindi il campo F è solenoidale in Ω . Ma, come vedremo nell'Esempio 5.41, esso non ammette potenziale vettore.

Abbiamo preso come esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ che è un insieme semplicemente connesso per evidenziare un'ulteriore differenza con i campi conservativi. Riasumendo, per dimostrare che un campo ammette un potenziale vettore, si verificherà prima di tutto se è solenoidale. Se non lo fosse, non ammette potenziale vettore. Se invece lo fosse, bisognerà verificare che l'insieme considerato sia stellato. Una volta stabilito che esiste un potenziale vettore bisogna trovarlo e l'operazione è più complicata che per il potenziale scalare.

Al calcolo di un potenziale vettore premettiamo due osservazioni. Innanzitutto, vale ancora la proprietà di esistenza locale: se un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (con $n = 2, 3$) è solenoidale allora il potenziale vettore esiste almeno localmente. Questo ci permetterà di stabilire subito se vale la pena di cercarlo. La seconda osservazione riguarda il metodo: ci sono diversi modi per determinare un potenziale vettore, ne esporremo qui uno piuttosto efficace. Ma qualunque altro modo è lecito; il lettore non si sorprenda se trova metodi diversi esposti in altri libri. Ricordiamo poi che, una volta determinato un potenziale vettore, altri si ottengono aggiungendo campi conservativi. Proprio questo fatto ci suggerisce di cercare un potenziale vettore con una componente nulla.

Dato un campo solenoidale $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, risolvere $\text{rot} V = F$ significa risolvere il sistema

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = F_1, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = F_2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = F_3.$$

Se imponiamo, per esempio, che sia $V_1 = 0$, questo sistema diventa

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = F_1, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x} = -F_2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = F_3. \quad (5.23)$$

Integrando rispetto a x la seconda e la terza equazione in (5.23) otteniamo

$$V_3(x, y, z) = - \int F_2(x, y, z) dx, \quad V_2(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dx.$$

Questi sono integrali indefiniti che rappresentano infinite funzioni che differiscono tra di loro per funzioni delle sole variabili y e z . Imponiamo che V_2 e V_3 non contengano addendi che dipendano solo da y e z . In tal caso, dato che $\nabla \cdot F = 0$, risulta verificata anche la prima delle (5.23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial y} \int F_2(x, y, z) dx - \frac{\partial}{\partial z} \int F_3(x, y, z) dx \\ &= - \int \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) \right) dx = \int \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) dx = F_1(x, y, z). \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato il

Teorema 5.36. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($n = 2, 3$) tale che $\nabla \cdot F = 0$ in Ω ; allora per ogni $M \in \Omega$ esiste un intorno $\Omega_M \subset \Omega$ tale che F ammette localmente un potenziale vettore $V \in C^2(\Omega_M, \mathbb{R}^n)$ determinato da*

$$V(x, y, z) = \left(0, \int F_3(x, y, z) dx, - \int F_2(x, y, z) dx \right)$$

dove le primitive contengono solo addendi che dipendono da x . Ogni altro potenziale vettore si ottiene sommando a V un campo conservativo.

Applichiamo questo teorema al seguente

Esempio 5.37. *Il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x, -2y, z)$ è solenoidale. Risulta*

$$\int F_3(x, y, z) dx = xz + \phi(y, z), \quad - \int F_2(x, y, z) dx = 2xy + \psi(y, z).$$

Eliminando gli addendi che non dipendono da x , e cioè imponendo $\phi = \psi = 0$, troviamo che un potenziale vettore di F è $V(x, y, z) = (0, xz, 2xy)$.

5.8 Teoremi della divergenza e del rotore

Iniziamo questo paragrafo con il fondamentale

Teorema 5.38. (della divergenza)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) un aperto limitato, semplice rispetto a tutti gli assi cartesiani con versore normale uscente n in ogni punto di $\partial\Omega$. Sia $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Allora

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F(x) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS.$$

Il Teorema 5.38 afferma che *l'integrale su un dominio della divergenza di un campo è pari al flusso del campo che attraversa la sua frontiera*. Nel caso $n = 1$, con $\Omega = (a, b)$, il Teorema 5.38 diventa

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

e coincide quindi con il *Teorema fondamentale del calcolo integrale*. Il Teorema 5.38 consente anche di spiegare il significato dell'operatore divergenza. Supponiamo che il campo che rappresenta il flusso di un fluido sia a divergenza nulla in un dominio Ω ; applicando il Teorema 5.38 in ogni sottodominio di Ω deduciamo che la media tra flusso entrante e flusso uscente è nulla e quindi che il fluido è incompressibile (liquido). La divergenza misura il grado di comprimibilità di un fluido e, più in generale, quella di un campo vettoriale.

A parte il caso elementare monodimensionale già discusso, le dimensioni “fisiche” sono $n = 2$ e $n = 3$; queste sono anche le dimensioni dove il Teorema 5.38 ha le applicazioni più importanti.

Esempio 5.39. *Determiniamo il flusso del campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = (3x + e^z)i + (2y^2 + z \cos x)j + (x^2 + y^2)k$$

attraverso la superficie

$$\Sigma = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z \geq 0 \end{cases},$$

scegliendo come versore normale quello avente componente positiva in z .

Osserviamo che Σ è metà superficie sferica che, sul piano (x, y) , poggia sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 2$. Immaginando di “chiudere” Σ con il disco $D = \{x^2 + y^2 \leq 2, z = 0\}$, possiamo calcolare il flusso di F uscente dal volume Ω racchiuso tra la semisfera e il disco, tramite il Teorema della divergenza (Teorema 5.38):

$$\begin{aligned} \Phi_{\Omega} &= \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_{\Omega} (3 + 4y) \, dx dy dz \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} 3 \, dx dy dz}_{3 \operatorname{vol}(\Omega)} + \underbrace{\int_{\Omega} 4y \, dx dy dz}_{=0 \text{ per simmetria}} = 4\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che il flusso uscente da Ω è la somma del flusso Φ_{Σ} attraverso Σ (con normale che punta verso l'alto) e del flusso Φ_D attraverso D (con normale che punta verso il basso: $n = -k$), otteniamo allora il flusso attraverso Σ per differenza:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \Phi_{\Omega} - \Phi_D = 4\pi\sqrt{2} - \int_D F \cdot (-k) \, dx dy = 4\pi\sqrt{2} + \int_D (x^2 + y^2) \, dx dy \\ &= 4\pi\sqrt{2} + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \, \rho \, d\rho = 4\pi\sqrt{2} + 2\pi. \end{aligned}$$

Teorema 5.40. (del rotore)

Sia Σ una superficie regolare orientata con versore normale n , con bordo regolare $\partial^+\Sigma$ orientato positivamente e sia T il versore tangente a $\partial^+\Sigma$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un intorno (aperto) di Σ e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Allora,

$$\int_{\Sigma} (\nabla \wedge F) \cdot n \, dS = \int_{\partial^+\Sigma} F \cdot T \, d\sigma.$$

Il Teorema 5.40 vale anche in ipotesi più tenui di regolarità. Inoltre, se la superficie Σ fosse anche chiusa e rimanessero vere tutte le altre ipotesi, il Teorema 5.40 afferma che

$$\int_{\Sigma} (\nabla \wedge F) \cdot n \, dS = 0$$

dato che $\partial\Sigma = \emptyset$. Osserviamo poi che se Σ è una superficie piana contenuta nel piano (x, y) e se il campo F è bidimensionale, $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, allora per la (5.3) il Teorema 5.40 diventa la Formula di Gauss-Green nel piano, si veda la (5.17).

Come ulteriore applicazione del Teorema 5.40 possiamo rispondere alla questione lasciata in sospeso nell'Esempio 5.35.

Esempio 5.41. *Mostriamo che il campo solenoidale $F \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3)$ dell'Esempio 5.35 non ammette potenziale vettore. Supponiamo per assurdo che lo ammetta, e cioè esista $V \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3)$ tale che*

$$\nabla \wedge V(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Applichiamo il Teorema 5.40 alla sfera senza una calotta artica, si veda il disegno di destra nella Figura 5.8: chiamiamo Σ_r la superficie sferica di raggio 1 privata della calotta artica di raggio $r < 1$ (Σ_1 rappresenta l'emisfero sud). Orientiamo Σ_r con il versore normale $n(x, y, z) = xi + yj + zk$ in modo che il parallelo $\partial^+\Sigma_r$ sia orientato verso ovest, vedere ancora la Figura 5.8: in tal caso, il versore tangente è dato da

$$T(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}i - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}j + 0k.$$

Applicando il Teorema 5.40 al campo V otteniamo

$$A(\Sigma_r) = \int_{\Sigma_r} dS = \int_{\Sigma_r} F \cdot n \, dS = \int_{\Sigma_r} (\nabla \wedge V) \cdot n \, dS = \int_{\partial^+\Sigma_r} V \cdot T \, d\sigma.$$

Siccome $V \in C^2$ in prossimità del polo nord, rimane limitata e il membro di destra tende a 0 per $r \rightarrow 0$ dato che la lunghezza di $\partial\Sigma_r$ tende a 0. Invece, il membro di sinistra tende all'area della sfera intera che vale 4π . Questo assurdo ci dice che non esiste il potenziale vettore V .

6 Serie di funzioni

6.1 Serie di potenze

6.1.1 Nel campo complesso

Le serie geometriche, introdotte nell'Esempio 1.15, convergono se e solo se la loro ragione $q \in \mathbb{R}$ soddisfa $|q| < 1$; in tal caso, la loro somma vale $1/(1-q)$. Per come è stato ottenuto questo risultato, non c'è nessun motivo di considerare solo ragioni reali e possiamo tranquillamente scrivere

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1.$$

Questo è un primo esempio di serie di potenze.

Definizione 6.1. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri complessi e sia $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

si chiama *serie di potenze centrata in z_0* .

È chiaro che con la semplice traslazione $z - z_0 \mapsto z$ possiamo ricondurci al caso $z_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (6.1)$$

Vogliamo stabilire per quali z converge questa serie: intendiamo cioè studiare la convergenza della serie numerica di termine generale $a_n z^n$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Proposizione 6.2. (Criterio del rapporto)

Se esiste

$$R := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (6.2)$$

allora la serie (6.1) converge se $|z| < R$ e non converge se $|z| > R$.

Proposizione 6.3. (Criterio della radice)

Se esiste

$$R := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (6.3)$$

allora la serie (6.1) converge se $|z| < R$ e non converge se $|z| > R$.

Ovviamente, questi due criteri non sono incompatibili. Essi affermano che **l'insieme di convergenza di una serie di potenze in $\mathbb{C}$ è un disco**. Se $R = +\infty$ il disco coincide con tutto $\mathbb{C}$, se $R = 0$ il disco è vuoto: il numero $R \in [0, +\infty]$ si chiama **raggio di convergenza** della serie di potenze. Osserviamo che questi criteri non dicono nulla sul comportamento della serie nei punti sul bordo del disco, cioè per $|z| = R$.

Il nome di questi criteri prende spunto da quelli introdotti nel Paragrafo 1.2.3: vediamo come si dimostrano.

Dimostrazione. Applichiamo il criterio del rapporto per serie numeriche (Proposizione 1.23) alla serie (6.1): questa serie converge se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| < 1$$

cioè se

$$|z| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Applichiamo poi il criterio della radice per serie numeriche (Proposizione 1.24) alla serie (6.1): questa serie converge se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$$

cioè se

$$|z| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Per le Proposizioni 1.23 e 1.24, le disuguaglianze opposte provano la divergenza della serie (6.1). I criteri qui sopra sono così dimostrati. $\square$

Torniamo al problema della convergenza della serie (6.1) quando $|z| = R$ e vediamo alcuni esempi.

Esempio 6.4. *Si considerino le tre serie*

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Il raggio di convergenza di ognuna di queste è $R = 1$: questo si ottiene facilmente con entrambi i criteri.

Per qualunque $|z| = 1$, la serie (a) non converge perché $z^n \not\rightarrow 0$, manca la condizione necessaria (1.9).

Se $z = 1$, la serie (b) diverge perché coincide con la serie armonica. Se $z = -1$ la serie (b) converge per il criterio di Leibniz. Quindi, la serie (b) converge per qualche $|z| = 1$ e non converge per altri $|z| = 1$.

Per ogni $|z| = 1$ risulta $|\frac{z^n}{n^2}| = \frac{1}{n^2}$: quindi la serie (c) converge assolutamente per tutte le $|z| = 1$, si veda la (1.12).

Le serie di potenze godono di alcune importanti proprietà. Prima di enunciarle è bene chiarire cosa si intende per *derivata* e *primitiva* di una funzione di variabile complessa. Dando per scontata la definizione di continuità, diremo che una funzione continua $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è derivabile nel punto z_0 se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

e chiameremo $f'(z_0)$ la derivata di f in z_0 ; anche questa definizione è in linea con quella delle funzioni reali ma bisogna fare attenzione perché h è un “incremento” complesso e quindi somiglia molto a un incremento in $\mathbb{R}^2$. Se poi f è derivabile in un aperto $A \subset \mathbb{C}$ chiameremo f' la sua derivata. Infine, se esiste una funzione derivabile $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $F' = f$, diremo che F è una primitiva di f .

Possiamo adesso enunciare il

Teorema 6.5. *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri complessi tale che la serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converga per $|z| < R$ (con $R > 0$). Allora le serie ottenute derivando e integrando termine a termine, e cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1},$$

sono rispettivamente la derivata e una primitiva della funzione f ; inoltre, il loro raggio di convergenza è ancora R .

Per convincersi che il raggio di convergenza rimane lo stesso, basta applicare uno dei criteri qui sopra dato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+2) a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right|$$

e lo stesso vale per il criterio della radice. Questa non è una dimostrazione rigorosa perché restano esclusi i casi dove i limiti non esistono.

6.1.2 Nel campo reale

Vogliamo ora ambientare le serie di potenze in ambito reale. Anche qui, il problema è quello di stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{6.4}$$

converge. Vorremmo però prima chiarire per bene cosa si intende per “convergere” anche perché ci sono diversi modi di convergenza.

Diremo che una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ **converge puntualmente** per ogni $x \in I$ se la serie numerica $\sum_n f_n(x)$ converge per ogni $x \in I$. Questo non è un gioco di parole! Il lettore analizzi attentamente questa definizione.

Una volta che abbiamo trovato l'insieme di convergenza puntuale, possiamo chiamare (per esempio) $f(x)$ la somma della serie, e cioè il limite della successione delle somme parziali che, ovviamente, può dipendere da x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k f_n(x) \quad \forall x \in I.$$

In tal caso, diremo che la serie di funzioni converge puntualmente a f sull'intervallo I .

Esempio 6.6. *Riprendiamo l'Esempio 1.15 riguardante le serie geometriche. Abbiamo visto che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1), \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ non converge se } x \notin (-1, 1).$$

Pertanto, la serie geometrica converge puntualmente a $f(x) = \frac{1}{1-x}$ su $(-1, 1)$.

Anziché ragionare puntualmente, in alcuni casi si può ragionare globalmente. Diremo che la serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ **converge uniformemente** a $f(x)$ su I se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k f_n(x) \right| = 0.$$

Questo dice che lo scostamento tra la funzione limite f e la successione delle somme parziali può essere (uniformemente) controllato e che tende a 0: per ogni $a > 0$ esiste $\bar{k}$ tale che $\sup_{x \in I} |f(x) - \sum_{n=0}^k f_n(x)| < a$ per ogni $k > \bar{k}$, si veda la Figura 6.1 con la striscia grigia che delimita la zona dove può trovarsi $\sum_{n=0}^k f_n(x)$ quando $k > \bar{k}$. Se $a \rightarrow 0$ si avrà $\bar{k} \rightarrow \infty$.

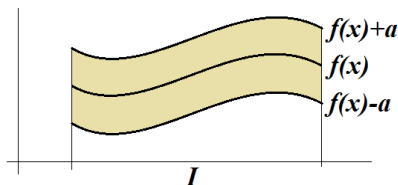


Figura 6.1: Striscia rappresentante la convergenza uniforme a f su I .

È chiaro che la convergenza uniforme implica quella puntuale (e quindi, se esistono, i due limiti sono uguali) mentre non è vero il viceversa.

Esempio 6.7. Abbiamo visto nell'Esempio 1.15 che la somma parziale k -esima di una serie geometrica vale

$$S_k(x) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}.$$

Ma allora, dato che $f(x) = \frac{1}{1-x}$ è il suo limite puntuale in $I = (-1, 1)$, abbiamo che

$$\sup_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k x^n \right| = \sup_{x \in I} \frac{|x|^{k+1}}{1-x} = +\infty$$

visto che per x arbitrariamente vicino a 1 il denominatore diventa arbitrariamente piccolo. Quindi la serie geometrica non converge uniformemente a $\frac{1}{1-x}$ su I . Se però pendiamo l'intervallo $I_\varepsilon = [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ (per $\varepsilon > 0$) troviamo

$$\sup_{x \in I_\varepsilon} \left| f(x) - \sum_{n=0}^k x^n \right| = \sup_{x \in I_\varepsilon} \frac{|x|^{k+1}}{1-x} = \frac{|1 - \varepsilon|^{k+1}}{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

e dunque abbiamo convergenza uniforme su I_ε per ogni $\varepsilon > 0$.

Diremo che la serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ **converge totalmente** su I se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)| < +\infty.$$

Questo significa che la serie numerica avente per termine generale l'estremo superiore delle f_n su I è convergente. I tre limiti (puntuale, uniforme, totale), se esistono, sono necessariamente uguali. Vale inoltre la gerarchia

$$\text{convergenza totale} \Rightarrow \text{convergenza uniforme} \Rightarrow \text{convergenza puntuale} \quad (6.5)$$

mentre non valgono i due viceversa.

Adesso che abbiamo chiarito questi tre tipi di convergenza, ne vedremo un quarto nel Paragrafo 6.2.1, ritorniamo all'analisi della serie di potenze (6.4) che trasliamo nell'origine:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (6.6)$$

Per determinare l'intervallo di convergenza possiamo ancora usare le formule (6.2) e (6.3): R rappresenta sempre il raggio di convergenza nel piano complesso ma, essendo interessati all'asse reale, considereremo solo l'intervallo $(-R, R)$ che è l'intersezione del disco di convergenza con $\mathbb{R}$. Come conseguenza dei criteri visti nel paragrafo precedente, otteniamo il

Corollario 6.8. La serie di potenze (6.6) converge puntualmente per ogni $x \in (-R, R)$, dove R è dato da (6.2) o (6.3), e non converge se $|x| > R$.

Come nel caso complesso, non possiamo dire nulla sulla convergenza in $x = \pm R$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, vale in generale quanto trovato nell'Esempio 6.7:

La serie (6.6) converge uniformemente in $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon \in (0, R)$.

Inoltre, possiamo avvalerci del

Teorema 6.9. (Criterio di Abel)

Se la serie di potenze (6.6) converge per $x = R$, allora converge uniformemente in $[-R + \varepsilon, R]$ per ogni $\varepsilon \in (0, R)$; analogo risultato se la serie converge per $x = -R$. Se la serie converge per $x = \pm R$ allora converge uniformemente su tutto $[-R, R]$.

In sostanza, la convergenza in uno degli estremi permette di ottenere la convergenza uniforme fino all'estremo incluso. Il lettore potrà essere sorpreso da tanto accanimento con la convergenza uniforme. Il prossimo risultato spiega perché è così importante.

Teorema 6.10. (Integrazione per serie)

Se la serie di potenze (6.6) converge uniformemente a f su $[c, d]$ allora

$$\int_c^d f(x) dx = \int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^d x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}.$$

Questo risultato permette di calcolare integrali, o valori approssimati, di funzioni delle quali non siamo in grado di trovare una primitiva. Illustriamo questo metodo nell'Esempio 6.12 qui sotto. Ma prima introduciamo una vasta classe di funzioni elementari delle quali sappiamo scrivere esplicitamente le serie di potenze che le rappresentano. Queste sono le **serie di Taylor** che sono i limiti dei polinomi di Taylor. Data una funzione f di classe C^∞ in un punto x_0 , possiamo scrivere formalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (6.7)$$

che coincide con la (6.4) una volta che abbiamo posto $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$. Se poi il raggio di convergenza della (6.7) è positivo ($R > 0$) e la serie converge a f , allora la scrittura non è solo formale ma vale per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. In tale intervallo si ha convergenza puntuale a $f(x)$ mentre la convergenza uniforme è garantita (almeno!) negli intervalli $[x_0 - R + \varepsilon, x_0 + R - \varepsilon]$ per ogni $\varepsilon \in (0, R)$. In particolare, la (6.7) si può scrivere (e giustificare rigorosamente) per le trascendenti elementari che riportiamo qui sotto:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = \infty), \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (R = 1),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (R = \infty), \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (R = \infty).$$

Osserviamo che le ultime due si possono ricavare l'una dall'altra derivando o integrando per serie. Osserviamo anche come dalla serie di Taylor di $\log(1+x)$ si possano ricavare altre serie di funzioni elementari.

Esercizio 6.11. *Determinare le serie di Taylor delle funzioni $\log(1-x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\arctan x$.*

Usando $\log(1+x)$ e il cambio $x \mapsto -x$ otteniamo che $\log(1-x) =$

Usando $\log(1-x)$ e derivando otteniamo che $\frac{1}{1-x} =$

Usando $\frac{1}{1-x}$ e il cambio $x \mapsto -x$ otteniamo che $\frac{1}{1+x} =$

Usando $\frac{1}{1+x}$ e il cambio $x \mapsto x^2$ otteniamo che $\frac{1}{1+x^2} =$

Usando $\frac{1}{1+x^2}$ e integrando otteniamo che $\arctan x =$

Vediamo adesso come si può integrare per serie.

Esempio 6.12. *Vogliamo calcolare*

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dato che l'integranda ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$, l'integrale converge, si veda il Paragrafo 1.1. Sfruttando la serie di Taylor di $\sin x$ sappiamo che

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad \text{con } R = +\infty.$$

Integrando per serie e applicando il Teorema 6.10 otteniamo

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{2n+1}.$$

La serie numerica trovata converge per il criterio di Leibniz, si veda la Proposizione 1.27. Il criterio stesso ci consente di trovare un valore approssimato per eccesso o per difetto: considerando i primi due termini otteniamo $\frac{17}{18} < I < 1$.

Una funzione molto semplice, ma della quale non esiste una primitiva in termini di funzioni elementari, è la *Gaussiana*, $f(x) = e^{-x^2}$.

Esercizio 6.13. Calcolare $I = \int_0^2 e^{-x^2} dx$.

Dalla serie di Taylor di e^x ricaviamo

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Applicando il Teorema 6.10 di integrazione per serie, otteniamo

$$I = \int_0^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(n+1)n!}.$$

6.2 Serie di Fourier

6.2.1 Forma trigonometrica

Nel Paragrafo 6.1.1 abbiamo visto che uno dei problemi principali nello studio delle serie di potenze $\sum_n a_n z^n$ è il loro comportamento quando $|z| = R$, con R raggio di convergenza. Per tali z possiamo scrivere $z = R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ e la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))$$

dove abbiamo usato la Formula di de Moivre. Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, siamo quindi portati a studiare la convergenza di **serie trigonometriche** del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\vartheta), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(n\vartheta) \quad (\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}).$$

Questa non è certo l'unica motivazione per studiare queste serie.

Facciamo un passo indietro e consideriamo le somme parziali. Per ogni scelta di $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, le funzioni

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^k (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)) \tag{6.8}$$

si chiamano **polinomi trigonometrici** di grado k ; è chiaro che sono funzioni periodiche di periodo 2π che hanno *valor medio* α_0 su $[0, 2\pi]$. Naturalmente, diremo che una serie trigonometrica converge se converge la successione delle sue somme parziali (e cioè una successione di polinomi trigonometrici). Per quanto appena detto, è logico aspettarsi che, se converge, una serie trigonometrica converga a una funzione 2π -periodica.

Ricordando la definizione di convergenza totale data nel Paragrafo 6.1.2 e la (6.5), osserviamo subito che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty \implies (6.8) \text{ converge totalmente su } [0, 2\pi] \quad (6.9)$$

$\implies (6.8) \text{ converge uniformemente} \implies (6.8) \text{ converge puntualmente.}$

Ad esempio, per la (1.11), sappiamo che la serie trigonometrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right)$$

converge totalmente. Derivando formalmente questa serie otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(nx)}{n} - \frac{\sin(nx)}{n} \right)$$

e ci accorgiamo che la situazione è “peggiorata”: possiamo concludere che, a differenza delle serie di potenze (si veda il Teorema 6.5), le serie trigonometriche possono perdere la convergenza dopo una derivazione.

La condizione in (6.9) appare troppo restrittiva per garantire la sola convergenza puntuale. Infatti, vi è una condizione sufficiente ben più debole, nota come **criterio di Dirichlet**:

$$\alpha_n, \beta_n \downarrow 0 \implies (6.8) \text{ converge puntualmente in } (0, 2\pi). \quad (6.10)$$

Il simbolo $\downarrow 0$ significa che le successioni decrescono monotonamente a 0 e, in particolare, che sono positive. Inoltre, la serie di seni converge (ovviamente!) a 0 per $x = 0, 2\pi$ mentre quella di coseni potrebbe non convergere in tali punti (basta pensare a $\alpha_n = \frac{1}{n}$ nel punto $x = 0$).

Fatte queste considerazioni, vediamo quale problema intendiamo affrontare. Vorremmo approssimare una funzione f tramite polinomi trigonometrici che convergano alla funzione stessa quando il loro grado tende a infinito. Un po' come abbiamo fatto con le serie di Taylor: prima abbiamo approssimato le funzioni tramite polinomi di Taylor e poi abbiamo fatto tendere il grado all'infinito ottenendo delle serie di potenze. Resta da capire quali funzioni siano approssimabili con polinomi trigonometrici. Per quanto appena detto, dobbiamo richiedere che la funzione f sia 2π -periodica. In realtà, questa non è una limitazione, qualunque funzione può essere resa periodica con un semplice accorgimento. Ad esempio, basta prendere la restrizione della funzione f a un intervallo I di ampiezza 2π e riprodurla periodicamente: è chiaro che la funzione così ottenuta coinciderà con la f solo nell'intervallo I ma, in tale intervallo, l'eventuale convergenza della serie sarà proprio alla funzione f .

Prima di affrontare direttamente il problema, enunciamo il

Lemma 6.14. *Per ogni $m, n = 1, 2, \dots$ risulta*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = 0, & \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0 \text{ se } m \neq n.\end{aligned}$$

Si trovano gli stessi valori integrando su qualunque intervallo di ampiezza 2π .

Prendiamo dunque una funzione f che sia 2π -periodica e supponiamo di poterla scrivere come

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \quad (6.11)$$

dove il motivo della scrittura $a_0/2$ sarà chiarito tra poche righe. Procedendo formalmente e usando il Lemma 6.14, per ogni $m \geq 1$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx &= \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) dx = \pi b_m\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \pi a_m;$$

inoltre,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(0x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi \frac{a_0}{2} = \pi a_0.$$

Quest'ultima relazione mostra che, per avere una formula valida anche per $m = 0$ è necessario usare $a_0/2$ nella (6.11); pertanto, $a_0/2$ è il valor medio della f . Questi calcoli dimostrano il

Teorema 6.15. *Se una funzione f è 2π -periodica e si può scrivere nella forma trigonometrica (6.11), allora*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \geq 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \forall n \geq 1.$$

In tal caso, gli a_n e b_n vengono chiamati **coefficienti di Fourier** di f mentre la serie (6.11) viene chiamata **serie di Fourier** associata alla f . Dobbiamo ora stabilire quando i passaggi formali sopra svolti sono effettivamente leciti. Come prima cosa, osserviamo che gli integrali del Teorema 6.15 si possono calcolare se risulta $\int_0^{2\pi} |f| < \infty$ e cioè se l'integrale improprio di $|f|$ è convergente. In tal caso, possiamo quindi dire che la serie (6.11) è la serie di Fourier formalmente associata alla f . Non possiamo però ancora dire se e come questa serie converge, possibilmente a f .

Introduciamo una nuova forma di convergenza che, come vedremo, è quella naturale per studiare le serie di Fourier. Diremo che la serie (6.11) **converge in media quadratica** alla f se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right|^2 dx = 0. \quad (6.12)$$

Sostanzialmente, f è approssimata nel senso della media quadratica (integrale del quadrato) dalla successione dei polinomi trigonometrici. Possiamo adesso enunciare il

Teorema 6.16. *Sia f una funzione 2π -periodica tale che $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$. Allora la sua serie di Fourier (6.11) converge a f in media quadratica.*

Questa convergenza risulta poco intuitiva, specie se confrontata con le convergenze (puntuale e uniforme) introdotte nel Paragrafo 6.1.1. Cerchiamo allora di darle una “veste geometrica”. Il lettore ha ben chiaro cosa sia lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ e come si definiscano in esso un prodotto scalare e quindi una nozione di ortogonalità. Se volessimo estendere questi strumenti allo spazio infinito-dimensionale $\mathbb{R}^\infty$ (spazio delle successioni) dovremmo convivere con un prodotto scalare che diventa una serie, con i relativi problemi di convergenza. Anziché $\mathbb{R}^\infty$, prendiamo lo spazio X delle funzioni f (non necessariamente periodiche) tali che $\int_0^{2\pi} f^2 < \infty$. Su questo spazio introduciamo il “prodotto scalare”

$$(f, g)_X = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in X.$$

Ma allora, per il Lemma 6.14,

$$\text{l'insieme di funzioni } B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \sin(nx) \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ è ortonormale in } X.$$

Se accettiamo il fatto che B sia completo, e cioè che rappresenti una base di X , allora ogni funzione $f \in X$ si può esprimere come combinazione lineare (infinita) degli elementi di B , si veda la (6.11). In tal caso, le sue “coordinate” in questa base si trovano usando il Teorema 6.15, facendo il prodotto scalare di f con gli elementi della base. A onor del vero, ci sarebbe da aggiustare qualcosa sulla funzione $1/\sqrt{2}$ ma preferiamo sorvolare, è l'idea di fondo che conta. La somma parziale k -esima (polinomio trigonometrico di grado k) è il

proiettato di f sul sottospazio finito-dimensionale di X (di dimensione $2k+1$) generato dalle funzioni $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n=1}^k$. La convergenza in media quadratica ci dice quindi che ogni $f \in X$ è approssimata dalla sua proiezione su questi sottospazi e che l'approssimazione tende a migliorare al crescere della dimensione: si osservi che l'integrale in (6.12) non è altro che il quadrato della norma in X di f meno la sua proiezione. Questa norma tende a 0 al tendere all'infinito del grado del polinomio trigonometrico approssimante. Per completare l'analogia con gli spazi Euclidei, non resta che formalizzare una versione infinito-dimensionale del Teorema di Pitagora.

Teorema 6.17. (Identità di Parseval)

Sia $f \in X$ e sia (6.11) la sua serie di Fourier. Allora

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Nel Teorema 6.17, il termine $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2$ rappresenta l'ipotenusa al quadrato (norma di f al quadrato) mentre la serie a secondo membro rappresenta la somma dei quadrati dei cateti. In particolare, il Teorema 6.17 garantisce che, qualora $f \in X$, la serie numerica a secondo membro converge; ma allora, per la (1.9), sappiamo che $a_n, b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ (questa proprietà è nota come Teorema di Riemann-Lebesgue).

Abbiamo finora visto due risultati di convergenza delle serie di Fourier. Il primo, espresso dalla (6.9), garantisce la convergenza totale che è la più forte di tutte, ivi compresa la convergenza in media quadratica. Il secondo risultato riguarda proprio la convergenza in media quadratica, si veda il Teorema 6.16. Volendo inserire questa convergenza nella gerarchia (6.5), possiamo dire che

$$\begin{aligned} \text{convergenza uniforme} &\Rightarrow \text{convergenza in media quadratica} \\ &\Rightarrow \text{convergenza puntuale su sottosuccessioni in quasi ogni punto.} \end{aligned}$$

Naturalmente, anche la convergenza totale implica la convergenza in media quadratica mentre l'ultima implicazione merita un po' di attenzione. Non si può infatti garantire che la convergenza in media quadratica di una serie di Fourier (o di una serie di funzioni più generale) converga *tutta* puntualmente. Però la convergenza puntuale è garantita su opportune sottosuccessioni, ad esempio quella con termini di ordine pari o con termini numeri primi (sono solo esempi!). Inoltre, potrebbero esserci "pochi punti" dove la serie non converge a quello che ci aspettiamo: questa affermazione è ancora più delicata ed è spiegabile con il fatto che se modifichiamo una funzione in pochi punti allora il suo integrale non cambia, si veda il Paragrafo 1.1. In conclusione, con la cautela dovuta a quanto appena osservato, possiamo comunque dire che la convergenza in media quadratica è più forte di quella puntuale e che i due limiti, se esistono, devono necessariamente coincidere a meno di pochi punti. Vi sono tuttavia diversi risultati che garantiscono direttamente la convergenza

puntuale senza coinvolgere la convergenza in media quadratica o le condizioni (6.9) e (6.10). Vediamone uno in particolare.

Definizione 6.18. Diciamo che $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ è **regolare a tratti** se è limitata in $[0, 2\pi]$ e se l'intervallo $[0, 2\pi]$ si può scomporre in un numero finito di sottointervalli su ciascuno dei quali f è continua e derivabile; inoltre, agli estremi di ogni sottointervallo, esistono finiti i limiti sia di f che di f' .

Naturalmente, se $f \in C^1[0, 2\pi]$ allora f è regolare a tratti ma questa classe è ben più ampia. Ci possono essere dei punti angolosi e persino dei punti di discontinuità di tipo salto, purché sia f che f' abbiano limiti finiti in prossimità dei salti. Non possono però esserci né asintoti verticali, né punti a tangenza verticale. È chiaro che una funzione f regolare a tratti soddisfa l'ipotesi del Teorema 6.16; pertanto, la sua serie di Fourier converge in media quadratica alla f . Ma allora sappiamo che, a meno di possibili sorprese in pochi punti, la convergenza sarà anche puntuale. Sono proprio questi punti a richiedere una particolare attenzione.

Data una funzione f regolare a tratti e dato un punto $x_0 \in [0, 2\pi]$ indichiamo, rispettivamente, con $f(x_0^-)$ e $f(x_0^+)$ i limiti sinistro e destro di f in x_0 . Per ogni funzione regolare e per ogni punto, questi valori risultano finiti. Per la periodicità di f risulta $f(0^\pm) = f(2\pi^\pm)$ e quindi possiamo definire questi limiti anche agli estremi dell'intervallo. Se f è continua in x_0 risulta ovviamente $f(x_0) = f(x_0^\pm)$. Possiamo adesso enunciare il

Teorema 6.19. Sia $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier (6.11) converge in ogni punto $x_0 \in [0, 2\pi]$ alla media dei due limiti $f(x_0^\pm)$:

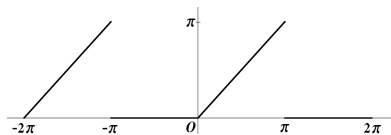
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0) \right) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

con la convenzione che $f(0^\pm) = f(2\pi^\pm)$. In particolare, se f è continua in x_0 , allora la serie converge a $f(x_0)$.

Esempio 6.20. Si consideri la funzione f , 2π -periodica, definita da

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{per } -\pi < x < \pi.$$

Il suo grafico nell'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$ è rappresentato nella figura qui accanto. Nei punti di discontinuità non è definita la f . I coefficienti di Fourier di f sono:



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

e quindi

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad \forall n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = -\frac{(-1)^n}{n}.$$

Siccome $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 < \infty$, la serie di Fourier converge in media quadratica a f su $(-\pi, \pi)$. Inoltre, converge puntualmente a f in $(-\pi, \pi)$ mentre converge puntualmente a $\frac{\pi}{2}$ nei punti $x = \pm\pi$. In particolare, la convergenza puntuale in $x = 0$ fornisce

$$0 = f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

6.2.2 Funzioni pari e dispari, periodi diversi da 2π

Abbiamo già osservato che i coefficienti di Fourier di una funzione 2π -periodica f si possono calcolare integrando su qualunque intervallo di ampiezza 2π . Nell'Esempio 6.20 li abbiamo calcolati integrando su $[-\pi, \pi]$ che, per certi versi, è il “migliore” intervallo possibile dato che permette di sfruttare le eventuali simmetrie della funzione f .

Infatti, se la funzione f è **pari** allora risulta pari anche $f(x) \cos(nx)$ mentre risulta dispari $f(x) \sin(nx)$; pertanto

$$f \text{ pari} \implies a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0 \quad \forall n.$$

Invece, se la funzione f è **dispari** allora risulta dispari anche $f(x) \cos(nx)$ mentre risulta pari $f(x) \sin(nx)$; pertanto

$$f \text{ dispari} \implies a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \quad \forall n.$$

Queste formule consentono di semplificare i calcoli e affermano che la serie di Fourier di una funzione pari (dispari) è una serie di soli coseni (seni).

Esercizio 6.21. Si consideri la funzione $f(x)$ dispari, 2π -periodica, definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(i) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$. (ii) Determinare la serie di Fourier associata a f . (iii) Studiare la convergenza puntuale e in media quadratica della serie trovata. (iv) Scrivere l'identità di Parseval relativa alla serie trovata e dedurre il valore di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(i) Grafico:

(ii) Serie di soli seni:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - x}{2} \sin(nx) dx = \frac{1}{n}$$

e la serie di Fourier associata a f è data da

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

(iii) Dato che f^2 è integrabile
convergenza puntuale

. Inoltre, si ha
. (iv) Si ha

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Abbiamo finora considerato funzioni 2π -periodiche, cosa cambia se consideriamo funzioni periodiche con periodo $T \neq 2\pi$? L'unica vera differenza sta nel calcolo dei coefficienti di Fourier. Le funzioni T -periodiche della base ortogonale sono $\cos(\frac{2\pi n}{T}x)$ e $\sin(\frac{2\pi n}{T}x)$ e i coefficienti di Fourier di una funzione T -periodica sono dati da

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) dx.$$

La funzione f si scrive allora

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \right)$$

e per la convergenza di tale serie valgono le stesse regole: (6.9) per la convergenza totale, il Teorema 6.16 per la convergenza in media quadratica, il Teorema 6.19 per la convergenza puntuale (in questi teoremi bisogna sostituire 2π con T). L'ultimo passo è la riscrittura dell'identità di Parseval (Teorema 6.17) che, per funzioni T -periodiche f soddisfacenti $\int_0^T f^2 < \infty$, diventa

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

6.2.3 Forma esponenziale complessa

La ben nota formula di Eulero per l'esponenziale di un immaginario puro, $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$, suggerisce di scrivere una serie di Fourier utilizzando gli esponenziali. Per semplicità ci limiteremo a considerare funzioni 2π -periodiche. Dalla formula di Eulero ricaviamo

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Per ogni $n \geq 0$, poniamo

$$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{f_n}; \quad (6.13)$$

in particolare, $f_0 = \frac{a_0}{2}$. Ma allora, per il Teorema 6.15 e con un semplice calcolo, vediamo che

$$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) [\cos(nx) - i \sin(nx)] dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

$$f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) [\cos(nx) + i \sin(nx)] dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx,$$

dove entrambe queste formule valgono per ogni $n \geq 0$. Dalle (6.13) ricaviamo facilmente che

$$a_n = f_n + f_{-n}, \quad b_n = i(f_n - f_{-n})$$

e quindi, dal Teorema 6.15 e dalla (6.11),

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}.$$

Infine, l'identità di Parseval (Teorema 6.17) somiglia ancora di più al Teorema di Pitagora:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2.$$

Lasciamo al lettore la (facile!) traduzione del Lemma 6.14 in termini di esponenziali complessi.

7 Equazioni differenziali

7.1 Definizioni e motivazioni

Un'equazione differenziale è una relazione tra una funzione incognita $y = y(t)$ e alcune sue derivate. La possiamo scrivere formalmente come

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad (t \in I) \quad (7.1)$$

dove I è un intervallo e f è una funzione da $\mathbb{R}^{n+2}$ a $\mathbb{R}$. Si chiama **ordine** dell'equazione il grado della più alta derivata che compare; nel caso precedente, l'ordine è n . Si chiama **soluzione** dell'equazione differenziale (7.1) una funzione $y \in C^n(J)$ che soddisfi la (7.1) per ogni t in un intervallo $J \subseteq I$.

Sono ben poche le equazioni differenziali che si riescono a risolvere, ne vedremo qualcuna in seguito. In alcuni casi, ci si accontenta dell'andamento qualitativo delle soluzioni, di soluzioni approssimate sia teoricamente che numericamente. Un importante problema è quello di determinare condizioni che garantiscano l'unicità della soluzione. Come esempio elementare, osserviamo che l'equazione differenziale $y'(t) = e^t$ ammette le infinite soluzioni $y(t) = e^t + k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$: pertanto, in generale, non si avrà l'unicità della soluzione.

Le equazioni differenziali sono il principale strumento analitico per descrivere modelli matematici nelle scienze, quali la fisica, l'ingegneria, la biologia, ma anche in economia. Vediamo un esempio "canonico" che descrive il comportamento di una popolazione di batteri. Se la popolazione è inizialmente (al tempo $t = 0$) composta da N_0 individui e se chiamiamo $N(t)$ la popolazione al tempo t , ci aspettiamo che, in media, in ogni intervallo di tempo Δt nasca una quantità di batteri proporzionale alla popolazione e al tempo trascorso, cioè pari a $nN(t)\Delta t$ dove $n > 0$ è il tasso di natalità. Analogamente, ci aspettiamo che muoiano $mN(t)\Delta t$ batteri nello stesso intervallo di tempo, essendo $m > 0$ il tasso di mortalità. La popolazione al tempo $t + \Delta t$ è data dalla popolazione al tempo t a cui aggiungiamo la popolazione appena nata e sottraiamo quella morta, ovvero

$$N(t + \Delta t) = N(t) + (n - m)N(t)\Delta t \Leftrightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (n - m)N(t)$$

e, passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$N'(t) = (n - m)N(t).$$

Questa è un'equazione differenziale del prim'ordine. Come vedremo più avanti, l'unica soluzione di questa equazione con la condizione $N(0) = N_0$ è data da

$$N(t) = N_0 e^{(n-m)t},$$

una funzione esponenziale crescente se $n > m$ (natalità superiore alla mortalità) e decrescente se $n < m$; ovviamente, se $n = m$ allora $N(t)$ rimane costante. È superfluo dire che il modello è molto semplificato e fornisce risposte imprecise. Il tasso di crescita non può essere proporzionale (con n fisso) alla popolazione presente con una costante fissa di proporzionalità. Se $n > m$ non possiamo certo aspettarci un'invasione di batteri! Interverranno dei fattori quali la mancanza di alimenti e di spazi che diminuiranno il tasso di natalità. È più logico aspettarsi che n sia inversamente proporzionale a N . Ma questo porterebbe a un problema non lineare di difficile risoluzione e ci costringerebbe a usare metodi di approssimazione. In ogni caso, sia pure in modo molto semplificato, il modello considerato descrive la dinamica delle popolazioni.

Come già osservato, saranno poche le equazioni che riusciremo a risolvere esplicitamente e/o per le quali vi sia una buona teoria che garantisca almeno l'esistenza e l'unicità della soluzione. Il tipo più studiato è quello delle equazioni in forma normale. Diremo che un'equazione differenziale è in **forma normale** se è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo in funzione di tutte le derivate di ordine inferiore. Anziché nella forma (7.1), tali equazioni si scriveranno

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (t \in I) \quad (7.2)$$

con $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. In molti casi, se l'equazione si presenta nella forma generale (7.1), il primo passo sarà proprio quello di cercare di riscriverla nella forma (7.2). Associato a un'equazione in forma normale (7.2), si considera di solito il **problema di Cauchy**:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \quad (7.3)$$

dove t_0 rappresenta l'istante iniziale, quello dove misuriamo lo stato del sistema, mentre i numeri $y_0, \dots, y_{n-1}$ descrivono, appunto, lo stato. Risolvere (7.2)-(7.3) significa riuscire a prevedere come si comporterà la $y(t)$ (stato del sistema) negli istanti futuri $t > t_0$. Chiameremo **integrale generale** di (7.2) l'insieme di tutte le sue infinite soluzioni; chiameremo invece **integrale particolare** una sua soluzione che soddisfa particolari proprietà quali, ad esempio, le (7.3).

Riprendendo l'esempio $y'(t) = e^t$, vediamo che un problema di Cauchy associato prende la forma $y(t_0) = y_0$ e quindi il problema si riduce a determinare l'unica primitiva di e^t il cui grafico passa per il punto (t_0, y_0) . È anche chiaro che se dobbiamo risolvere una semplice equazione del tipo $y''(t) = 2$ (del second'ordine), le soluzioni saranno $y(t) = t^2 + at + b$ con a e b costanti da determinare: avremo quindi bisogno di due condizioni del tipo $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$.

Nel prossimo paragrafo studieremo esistenza e unicità per il problema (7.2)-(7.3) nel caso di equazioni differenziali del prim'ordine in forma normale, $y' = f(t, y)$. Se un'equazione fosse di ordine superiore, ad esempio del second'ordine

$y'' = f(t, y, y')$, con un semplice trucco potremmo ricondurci a un *sistema* del prim'ordine: basta porre $z = y'$ e la precedente equazione del second'ordine si traduce nelle due seguenti equazioni del prim'ordine

$$y' = z, \quad z' = f(t, y, z),$$

dove l'incognita è adesso il vettore (y, z) .

7.2 Esistenza e unicità

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (7.4)$$

dove f è una funzione di due variabili che soddisfa opportune proprietà. Risolvere (7.4) significa trovare un $\delta > 0$ e una funzione $y \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tali che

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Sottolineiamo il fatto che, prima ancora di trovare una funzione che soddisfi (7.4), dobbiamo trovare un intorno di t_0 dove poterla definire. Il problema è quello di stabilire se esiste un tale intorno e se esiste (e magari è unica) la soluzione nel senso appena definito.

Un primo risultato garantisce l'esistenza.

Teorema 7.1. (Teorema di Peano)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $f \in C^0(\Omega)$ allora esiste una soluzione del problema di Cauchy (7.4).

Come vedremo nel prossimo paragrafo, il Teorema 7.1 non è migliorabile, la soluzione potrebbe non essere unica. Ribadiamo che il Teorema 7.1 deve, di fatto, leggersi come: *esiste $\delta > 0$ ed esiste y tale che...*

Aumentando le ipotesi sulla f possiamo ottenere anche l'unicità della soluzione.

Teorema 7.2. (Teorema di Cauchy)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $(t_0, y_0) \in \Omega$. Se $f, f_y \in C^0(\Omega)$ allora esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy (7.4).

Il Teorema 7.2 stabilisce che le infinite soluzioni dell'equazione $y' = f(t, y)$ non si possono incontrare, ognuna di esse rappresenta un limite invalicabile per le altre. Questo può servire a dimostrare, per esempio, che la funzione esponenziale è sempre positiva: si prende l'equazione $y' = y$ e si osserva che $y \equiv 0$ è soluzione, quindi ogni altra soluzione non può cambiare segno!

Non daremo qui la dimostrazione completa del Teorema 7.2, ma diamo un'idea di come si possa ottenere, anche perché essa è costruttiva e permette

di trovare soluzioni approssimate del problema di Cauchy. Come prima cosa, riscriviamo (7.4) nel modo seguente:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (7.5)$$

Il lettore può facilmente verificare che tutte e sole le soluzioni di (7.4) sono anche soluzioni di (7.5). L'attenzione si sposta dunque sul problema equivalente (7.5) che non è più semplice, dato che si tratta di un'equazione integrale, ma consente di definire una trasformazione di funzioni nel modo seguente:

$$(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad \forall y \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

dove $\delta > 0$ si può determinare con un opportuno ragionamento che qui non faremo. Pertanto, una soluzione di (7.5), e quindi di (7.4), soddisfa $Ty = y$. Per dimostrare che tale equazione funzionale ammette un'unica soluzione, si utilizza un procedimento ricorsivo. Fissata "a caso" una funzione $y^0 \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, si definisce induttivamente $y^{n+1} = Ty^n$ per ogni $n \geq 0$. Si dimostra che la successione $\{y^n\}$ così definita converge all'unica soluzione di (7.5). Si può anche dimostrare che la scelta di y^0 non è vincolante, ogni y^0 genera una successione che converge alla medesima soluzione. Di solito, si prende $y^0 \equiv y_0$, e cioè la funzione costante che soddisfa la condizione iniziale in (7.4). Vediamo con un esempio, come funziona questo procedimento.

Si voglia risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2ty \\ y(0) = 1 \end{cases} \implies (Ty)(t) = 1 + 2 \int_0^t \tau y(\tau) d\tau. \quad (7.6)$$

Scegliendo $y^0(t) \equiv 1$ si ottiene

$$y^1(t) = 1 + t^2, \quad y^2(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}, \quad \dots \quad y^n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{k!} \quad \dots$$

e riconosciamo in y^n il polinomio di Taylor di grado $2n$ (o $2n+1$) della funzione e^{t^2} , si veda anche il Paragrafo 6.1. Per $n \rightarrow \infty$ si ha dunque che $y^n(t) \rightarrow e^{t^2}$ che è la soluzione di (7.6).

7.3 Equazioni a variabili separabili

Un'equazione differenziale del tipo

$$y' = f(t)g(y) \quad (7.7)$$

si dice equazione a **variabili separabili**. Dai Teoremi 7.1 e 7.2 ricaviamo direttamente il

Corollario 7.3. *Siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e sia f continua in un intorno di t_0 .*

(i) *Se g è continua in un intorno di y_0 , allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ per l'equazione (7.7) ammette una soluzione.*

(ii) *Se g è di classe C^1 in un intorno di y_0 , allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ per l'equazione (7.7) ammette una e una sola soluzione.*

Le equazioni a variabili separabili (7.7) prendono il loro nome dal procedimento utilizzato per risolverle. Come prima cosa, osserviamo che se esiste $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tale che $g(\bar{y}) = 0$ allora $y(t) \equiv \bar{y}$ è soluzione costante di (7.7); pertanto, se alla (7.7) associamo il problema di Cauchy $y(t_0) = \bar{y}$ abbiamo già trovato una soluzione. Naturalmente, se g è solo continua potrebbero essercene altre. Ma supponiamo di considerare un problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ con $g(y_0) \neq 0$, in modo da poter dividere l'equazione (7.7) per $g(y)$, almeno in un intorno di y_0 . Usando la notazione $y' = \frac{dy}{dt}$, i semplici passaggi per risolvere (7.7) sono i seguenti:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)g(y) \implies \frac{dy}{g(y)} = f(t)dt \implies \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)dt.$$

Come si vede sono state separate le variabili e sono state fatte due integrazioni separate. Questi integrali definiti fanno comparire una costante arbitraria che verrà determinata risolvendo il problema di Cauchy. Vediamo subito un esempio.

Esempio 7.4. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$y' = ty^2, \quad y(1) = 1.$$

Abbiamo $f(t) = t$ e $g(y) = y^2$, entrambe di classe C^∞ ; dal Corollario 7.3 deduciamo che la soluzione esiste ed è unica. Separando le variabili, otteniamo

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int t dt \implies -\frac{1}{y} = \frac{t^2}{2} + c \implies y(t) = \frac{2}{c - t^2}$$

dove abbiamo cambiato il valore della costante c . Imponendo la condizione $y(1) = 1$ si trova $c = 3$ e cioè $y(t) = \frac{2}{3-t^2}$: questa soluzione è prolungabile all'intervallo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Osserviamo poi che il problema di Cauchy $y(1) = 0$ ammette come unica soluzione $y(t) \equiv 0$.

Le equazioni a variabili separabili consentono di trovare facili controesempi all'unicità nel caso in cui la funzione g sia solo continua.

Esempio 7.5. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0. \tag{7.8}$$

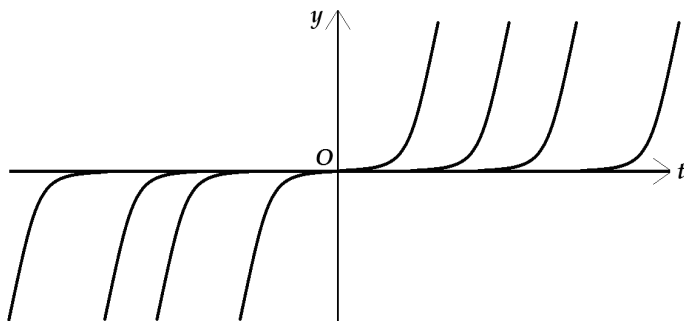
La funzione $y(t) \equiv 0$ è soluzione. Ne cerchiamo altre applicando formalmente il procedimento di separazione delle variabili:

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dt \implies 3y^{1/3} = t + c \implies y(t) = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$, troviamo una seconda soluzione: $y(t) = \frac{t^3}{27}$. In realtà, le soluzioni sono infinite: per ogni $\alpha \leq 0 \leq \beta$ basta considerare

$$y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-\alpha}{3}\right)^3 & \text{se } t \leq \alpha \\ 0 & \text{se } \alpha \leq t \leq \beta \\ \left(\frac{t-\beta}{3}\right)^3 & \text{se } t \geq \beta. \end{cases}$$

Ognuna di queste funzioni risolve (7.8) e appartiene a $C^1(\mathbb{R})$. Possiamo rappresentare queste soluzioni nell'unica figura



Le soluzioni sono delle cubiche che si attaccano all'asse delle t prima di $t = 0$ e si staccano dopo. Questo fenomeno prende il nome di **pennello di Peano**.

Il procedimento che si usa per studiare le equazioni a variabili separabili si basa sui seguenti passi:

- * stabilire se $f, g \in C^0$ e se $g \in C^1$;
- * risolvere l'equazione $g(\bar{y}) = 0$;
- * tutte le soluzioni di questa equazione rappresentano soluzioni costanti;
- * se $g \notin C^1$ ci potrebbe essere un pennello di Peano che si stacca dalla soluzione costante;
- * se $g \in C^1$ c'è unicità e le soluzioni costanti rappresentano dei "limiti invalidabili" per le altre soluzioni;
- * risolvere il problema di Cauchy.

Esercizio 7.6. Trovare e disegnare tutte le soluzioni dell'equazione $y' = 2t\sqrt{1-y^2}$. Risolvere poi il problema di Cauchy $y(0) = 1$.

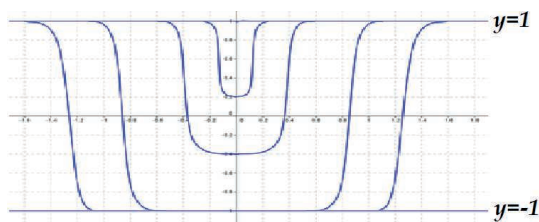
Con la notazione di (7.7) si ha $f(t) = 2t$ e $g(y) = \sqrt{1-y^2}$; quindi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, mentre $g \in C^\infty(-1, 1) \cap C^0[-1, 1]$.

Il Corollario 7.3 garantisce l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ se e solo se

Il Corollario 7.3 garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione del problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ se e solo se

Separando le variabili e con il cambio di variabile $y = \sin \vartheta$ si ottiene

Le soluzioni sono rappresentate nella seguente figura



In $y = \pm 1$ c'è un pennello di Peano. Imponendo $y(0) = 1$ si trova

Si contraddice il Corollario 7.3?

7.4 Equazioni lineari

Un'equazione differenziale del tipo

$$y' = a(t)y + b(t) \quad (7.9)$$

si dice equazione **lineare**. Dal Teorema 7.2 ricaviamo direttamente il

Corollario 7.7. Siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e siano a, b continue in un intorno di t_0 . Allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ per l'equazione (7.9) ammette una e una sola soluzione.

Per trovare l'integrale generale di (7.9) ci sono due metodi molto diversi tra di loro. Il primo, decisamente più semplice, sfrutta il fatto che la (7.9) si può scrivere come derivata di un prodotto. Il secondo, molto più articolato, ha il vantaggio di potersi applicare anche a equazioni lineari di ordine superiore e a sistemi di equazioni lineari.

Primo metodo: derivata di un prodotto. Sia $A(t) = \int a(\tau)d\tau$ una qualunque primitiva di $a(t)$; trasportando a primo membro la a e moltiplicando per l'esponenziale, possiamo riscrivere la (7.9) nella forma

$$e^{-A(t)}y'(t) - e^{-A(t)}a(t)y(t) = e^{-A(t)}b(t).$$

In questa forma, a primo membro riconosciamo la derivata di un prodotto:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-A(t)}y(t) \right) = e^{-A(t)}b(t).$$

Integrando ambo i membri si ottiene

$$e^{-A(t)}y(t) = \int e^{-A(\tau)}b(\tau)d\tau + C$$

dove con $C \in \mathbb{R}$ abbiamo indicato la generica costante dovuta all'integrale indefinito. Moltiplicando per l'esponenziale otteniamo infine

$$y(t) = e^{A(t)} \left\{ \int e^{-A(\tau)} b(\tau) d\tau + C \right\}. \quad (7.10)$$

Salta subito all'occhio come possa essere facile confondersi con i segni davanti a $A(t)$: per questo motivo, è consigliabile **non imparare a memoria la formula!** Basta sbagliare il segno e tutto risulterà sbagliato. Inoltre, in alcuni testi l'equazione (7.9) viene scritta nella forma $y' + a(t)y = b(t)$ e questo cambia ovviamente i segni di A . La parola d'ordine nella risoluzione di (7.9) deve essere *derivata di un prodotto*. Come si evince dalla (7.10), l'integrale generale si ottiene facendo variare la costante C , mentre la soluzione di un problema di Cauchy si ottiene imponendo la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$.

Esercizio 7.8. *Determinare l'integrale generale dell'equazione $y' = 1 - \frac{y}{t}$ (per $t > 0$) senza usare la (7.10).*

Mettiamo in evidenza la derivata di un prodotto nell'equazione $y' + \frac{y}{t} = 1$; moltiplicando per t si ottiene

$$ty' + y = t \implies \frac{d}{dt} \left(\quad \right) = t \implies y(t) = \quad .$$

Dalla soluzione si vede perché abbiamo imposto $t > 0$.

Secondo metodo: sovrapposizione e variazione delle costanti arbitrarie. Come prima cosa, risolviamo l'equazione omogenea associata a (7.9), che si ottiene ponendo $b = 0$: $y' = a(t)y$. Ovviamente $y \equiv 0$ è soluzione e quindi, per il Corollario 7.7, ogni altra sua soluzione ha segno costante. Per $y \neq 0$, questa è un'equazione a variabili separabili che, stando a quanto visto nel Paragrafo 7.3, si risolve come

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y \implies \frac{dy}{y} = a(t)dt \implies \log |y| = A(t) + c \implies |y(t)| = Ce^{A(t)}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e A è una primitiva di a . Due osservazioni sono adesso importanti. Nel passaggio qui sopra, sarebbe $C = e^c > 0$ ma, se togliamo il modulo, vediamo che y può anche essere negativo: perciò si può prendere qualunque $C \neq 0$. Se poi ci ricordiamo che la soluzione $y \equiv 0$ la avevamo già trovata in precedenza, possiamo affermare che

tutte le soluzioni dell'equazione $y' = a(t)y$ sono $y(t) = Ce^{A(t)}$ con $C \in \mathbb{R}$.

Perché abbiamo studiato l'equazione omogenea associata a (7.9)? Osserviamo che se y_1 e y_2 sono soluzioni di (7.9), allora $\bar{y} = y_2 - y_1$ è soluzione dell'equazione omogenea associata. Per quanto appena visto, possiamo quindi scrivere che

$$y_2 = y_1 + Ce^{A(t)}$$

e cioè vale il seguente **principio di sovrapposizione**:

l'integrale generale di (7.9) si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata un integrale particolare di (7.9).

All'apparenza questo metodo non è conveniente... dice che per trovare infinite soluzioni bisogna trovarne infinite più una! Tuttavia, il più è fatto, le infinite soluzioni dell'equazione omogenea le abbiamo trovate. Resta da determinarne una dell'equazione completa (7.9). All'uopo si sfrutta ancora la soluzione dell'equazione omogenea e si utilizza il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*. Qui di costante ce n'è una sola, la C che compare in $Ce^{A(t)}$. Facciamola variare, supponiamo cioè che anziché essere una costante sia una funzione e cerchiamo l'integrale particolare di (7.9) nella forma $y_1(t) = C(t)e^{A(t)}$. Imponendo a questa funzione di soddisfare (7.9) si trova

$$\begin{aligned} y_1' &= a(t)y_1 + b(t) \implies C'(t)e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} = C(t)a(t)e^{A(t)} + b(t) \\ \implies C'(t)e^{A(t)} &= b(t) \implies C'(t) = b(t)e^{-A(t)} \implies C(t) = \int b(\tau)e^{-A(\tau)}d\tau. \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato l'integrale particolare $y_1(t) = e^{A(t)} \int b(\tau)e^{-A(\tau)}d\tau$ che, sommato all'integrale generale dell'equazione omogenea $Ce^{A(t)}$, fornisce nuovamente (7.10).

Esercizio 7.9. Usando il metodo appena visto, determinare l'integrale generale dell'equazione lineare $y' = -\frac{t}{1+t^2}y + t$.

L'equazione omogenea associata è:

Separando le variabili, il suo integrale generale è:

Con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, troviamo l'integrale particolare dell'equazione completa:

L'integrale generale dell'equazione completa è:

7.5 Equazioni omogenee, equazioni di Bernoulli

In questo paragrafo vediamo due generalizzazioni delle equazioni a variabili separabili e delle equazioni lineari.

Un'equazione differenziale si dice **omogenea** se si può scrivere nella forma

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right). \quad (7.11)$$

Dal Teorema 7.2 ricaviamo il

Corollario 7.10. Siano $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f \in C^1$ in un intorno di y_0/t_0 . Allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ per l'equazione (7.11) ammette una e una sola soluzione.

Prima di procedere alla risoluzione di un'equazione omogenea, facciamo alcuni esempi:

$$y' = \log \frac{y}{t}, \quad y' = e^{-y^2/t^2}, \quad y' = \frac{2y^2 + 3ty - 5t^2}{ty}.$$

La terza equazione ha una f che è il quoziente di due *polinomi omogenei* di grado 2 nelle variabili t e y ; per metterla nella forma (7.11) è sufficiente dividere numeratore e denominatore per t^2 e si ottiene

$$y' = \frac{2\frac{y^2}{t^2} + 3\frac{y}{t} - 5}{\frac{y}{t}}.$$

La forma stessa della (7.11) richiede una certa prudenza nello scegliere $t_0 = 0$ come istante iniziale. In realtà la stessa prudenza va usata per $y_0 = 0$ dato che, ad esempio, anche l'equazione $y' = t/y$ è un'equazione omogenea.

Per trovare l'integrale generale della (7.11) la si riconduce a un'equazione a variabili separabili. Si pone

$$z(t) = \frac{y(t)}{t} \implies y(t) = tz(t) \implies y'(t) = z(t) + tz'(t)$$

e l'equazione (7.11) diventa

$$\begin{aligned} z + tz' &= f(z) \implies z' = \frac{f(z) - z}{t} \implies \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dt}{t} \\ &\implies \int \frac{dz}{f(z) - z} = \log |t| + c. \end{aligned}$$

A questo punto, è necessario risolvere l'equazione $f(z) = z$; se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $f(k) = k$, allora $z(t) \equiv k$ è soluzione e, di conseguenza, $y(t) = kt$ è soluzione di (7.11). Se $f \in C^1$, la retta che rappresenta tale funzione diventa un limite invalicabile per le altre soluzioni. Esclusi questi valori di k , l'equazione è diventata a variabili separabili.

Esempio 7.11. *L'equazione differenziale*

$$y' = \frac{2ty}{t^2 - y^2}$$

è del tipo (7.11) con

$$f(s) = \frac{2s}{1 - s^2}.$$

Le due semirette di equazione $y = 0$ con $t \leq 0$ sono linee integrali. Posto $z = \frac{y}{t}$, l'equazione diventa $z + tz' = \frac{2z}{1 - z^2}$ e cioè, separando le variabili,

$$\frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} dz = \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2} \right) dz = \frac{dt}{t},$$

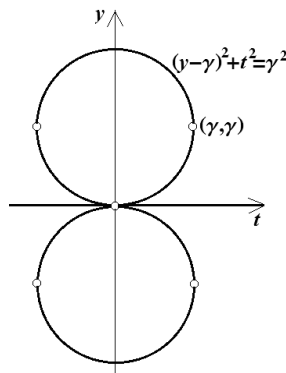
da cui

$$\log \frac{|z|}{1+z^2} = \log(Ct) \quad (\text{con } Ct > 0).$$

Tornando alla y si ottiene

$$t^2 + y^2 = 2\gamma y \quad (\text{dove } C = 1/2\gamma).$$

Si trovano quindi delle circonferenze con centro in $(0, \gamma)$ e raggio γ e quindi passanti per l'origine, con l'esclusione dei punti dove $y = \pm t$ e cioè dell'origine e dei punti $(\gamma, \pm\gamma)$, si veda la figura accanto.



Un'equazione differenziale si dice **di Bernoulli** se si può scrivere nella forma

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \quad (7.12)$$

Osserviamo subito che se $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, l'equazione è lineare, si veda (7.9): escludiamo quindi questi casi. Se poi α fosse irrazionale o razionale con denominatore pari, non avrebbe senso definire y^α per $y < 0$. Infine, se $\alpha < 0$ non ha senso y^α per $y = 0$.

Per evitare antipatiche discussioni ci occuperemo solo di soluzioni non negative, $y \geq 0$. Dal Teorema 7.2 ricaviamo il

Corollario 7.12. *Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \geq 0$ e siano $a, b \in C^0$ in un intorno di t_0 . Allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ per l'equazione (7.12) ammette una e una sola soluzione nei seguenti casi:*

$$(i) \alpha > 1, y_0 \geq 0, \quad (ii) 0 < \alpha < 1, y_0 > 0, \quad (iii) \alpha < 0, y_0 > 0.$$

Se $\alpha > 0$ la (7.12) ammette la soluzione nulla $y \equiv 0$; pertanto, se $\alpha > 1$ e $y_0 = 0$, il problema di Cauchy ha solo la soluzione nulla. Nel caso $y_0 = 0$ e $0 < \alpha < 1$, il Teorema 7.1 garantisce l'esistenza di una soluzione per il problema di Cauchy $y(t_0) = 0$ ma non è assicurata l'unicità: potrebbe crearsi un pennello di Peano. Naturalmente, se $y_0 > 0$ la soluzione rimarrà strettamente positiva per $\alpha > 1$, potrebbe agganciarsi alla soluzione $y \equiv 0$ con un pennello di Peano se $0 < \alpha < 1$, potrebbe tendere a 0 con tangente verticale se $\alpha < 0$ (in quest'ultimo caso, bisogna verificare il comportamento della funzione $b(t)$ che, annullandosi, potrebbe "vanificare" l'infinito di y^α).

Ciò premesso, vediamo come si risolve la (7.12): dividendola per y^α si ottiene $y^{-\alpha}y' = a(t)y^{1-\alpha} + b(t)$ che, dopo avere posto $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$, si riscrive come

$$z' = (1 - \alpha)a(t)z + (1 - \alpha)b(t)$$

che è un'equazione lineare. Possiamo quindi risolverla come la (7.9): una volta trovata la soluzione $z(t)$ (che sarà ≥ 0 o > 0 a seconda dei valori di α), si determina $y(t) = z(t)^{1/(1-\alpha)}$.

Esercizio 7.13. Si consideri il problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{3t} + y^4 \log t \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

(1) Stabilire per quali valori di (t_0, y_0) è applicabile il Teorema 7.2 di esistenza e unicità locale. (2) Determinare tutte le linee integrali di $(*)$ che passano per il punto $(1, 0)$. (3) Dimostrare che le soluzioni di $(*)$ hanno segno costante nel loro insieme di definizione. (4) Determinare l'integrale generale della $(*)$. (5) Determinare l'unica soluzione di $(*)$ quando $t_0 = 1$, $y_0 = \sqrt[3]{4/3}$.

(1) Il Corollario 7.12 si applica se $t_0 > 0$. (2) Poichè valgono le ipotesi del Corollario 7.12, esiste ed è unica la soluzione che è $y(t) = \dots$. (3) Se esistesse una soluzione $y = y(t)$ che cambia segno, essa dovrebbe annullarsi in un punto: $\dots$. (4) Se $y_0 \neq 0$, sappiamo che $y(t) \neq 0 \forall t$. Dividendo per y^4 e ponendo $z = \frac{1}{3y^3}$ otteniamo l'equazione lineare $-z' - \frac{z}{t} = \log t$; pertanto

$$z(t) = \dots \implies y(t) = \dots$$

(5) Imponendo $y(1) = \sqrt[3]{4/3}$ si trova $c = 0$ e $y(t) = \dots$.

7.6 Prolungamento delle soluzioni

Abbiamo già osservato come, anche nel caso migliore dell'esistenza e unicità della soluzione (Teorema 7.2), non sia in generale possibile fissare a priori l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. Per convincerci delle sorprese che si possono avere, vediamo alcuni casi espliciti.

Il problema di Cauchy

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = y_0$$

ammette l'unica soluzione $y(t) = y_0 e^t$ che è definita su tutto $\mathbb{R}$. Il problema di Cauchy

$$y'(t) = 1 + y(t)^2, \quad y(0) = y_0$$

ammette l'unica soluzione $y(t) = \tan(t + \arctan y_0)$ che è prolungabile solo nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2} - \arctan y_0, \frac{\pi}{2} - \arctan y_0)$. Vediamo quindi che se y_0 cresce l'intervallo destro di prolungabilità rimpicciolisce, fino a scomparire per $y_0 \rightarrow \infty$. Analogamente si comporta l'intervallo sinistro se y_0 decresce. Pertanto, la prolungabilità dipende non solo dall'equazione ma anche dalla condizione iniziale. Vediamo un altro esempio.

Esempio 7.14. Consideriamo l'equazione differenziale $y' = y^2$ con le tre condizioni iniziali: $y(0) = 0$, $y(0) = 1$, $y(0) = -1$. Le soluzioni di questi tre problemi di Cauchy sono, rispettivamente,

$$y_1(t) = 0, \quad y_2(t) = \frac{1}{1-t}, \quad y_3(t) = -\frac{1}{1+t}.$$

La y_1 è prolungabile a tutto $\mathbb{R}$, la y_2 è prolungabile su $(-\infty, 1)$, la y_3 è prolungabile su $(-1, +\infty)$.

Pertanto, anche la stessa equazione può avere soluzioni prolungabili solo a destra, solo a sinistra, ecc... E finora abbiamo considerato solo equazioni **autonome**, cioè dove la $f(t, y)$ non dipende esplicitamente da t . Sarebbe molto lungo e oneroso studiare tutti i casi che si possono presentare, ci limitiamo quindi a enunciare una sola condizione sufficiente per la prolungabilità.

Teorema 7.15. Sia $f, f_y \in C^0((a, b) \times \mathbb{R})$ e supponiamo che esistano due costanti $k_1, k_2 > 0$ tali che

$$|f(t, y)| \leq k_1 + k_2|y| \quad \forall (t, y) \in (a, b) \times \mathbb{R}. \quad (7.13)$$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ l'unica soluzione del problema di Cauchy (7.4) è prolungabile a tutto l'intervallo (a, b) .

La condizione (7.13) dice che f cresce al più linearmente rispetto a y e, di fatto, fornisce una stima sulla y' e quindi sulla crescita della y . Il Teorema 7.15 si può utilizzare per estendere la soluzione anche a tutto $\mathbb{R}$. Ad esempio, se consideriamo l'equazione $y' = e^t y + e^{t^2}$, non dobbiamo “farci impressionare” dalla crescita degli esponenziali: per ogni $a > 0$ risulta

$$|e^t y + e^{t^2}| \leq e^a |y| + e^{a^2} \quad \forall (t, y) \in (-a, a) \times \mathbb{R}$$

e, per il Teorema 7.15, le soluzioni sono prolungabili a tutto l'intervallo $(-a, a)$. Dato che questo ragionamento può essere ripetuto per ogni $a > 0$, ne deduciamo che le soluzioni sono prolungabili a tutto $\mathbb{R}$.

Un caso particolare in cui si applica il Teorema 7.15 è quando f è limitata su $\mathbb{R}^2$; ad esempio, $f(t, y) = \cos(t + y)$, $f(t, y) = e^{-t^2 - y^2}$, ... In questo caso, tutte le soluzioni sono prolungabili a $\mathbb{R}$.

7.7 Equazioni lineari del second'ordine a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad t \in I$$

dove $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $f \in C^0(I)$. Se fosse $a = 0$, questa equazione sarebbe del prim'ordine, caso particolare di (7.9). Se $a \neq 0$ possiamo dividere per a e ottenere un'equazione del tipo

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \quad t \in I. \quad (7.14)$$

Questa è un'equazione lineare del second'ordine a coefficienti costanti. Analogamente a quanto visto nel Paragrafo 7.4, vale il principio di sovrapposizione:

l'integrale generale di (7.14) si ottiene sommando all'integrale generale dell'equazione omogenea associata un integrale particolare di (7.14).

Vediamo dunque come risolvere l'equazione omogenea associata

$$y'' + by' + cy = 0 \quad t \in I. \quad (7.15)$$

Dato che la (7.15) si può ricondurre a un sistema di due equazioni del prim'ordine, il problema di Cauchy da associare alla (7.15) sarà del tipo

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1. \quad (7.16)$$

Questo significa che, oltre alla posizione iniziale $y(t_0)$ è necessario imporre una variazione iniziale $y'(t_0)$; in questo modo, il Teorema 7.2 (nella sua versione per i sistemi) garantisce che (7.15)-(7.16) ammette un'unica soluzione. Due soluzioni si possono incontrare ma non con la stessa derivata prima. Inoltre, il Teorema 7.15 garantisce che la soluzione è prolungabile a tutto $\mathbb{R}$. Le due condizioni (7.16) mostrano che le soluzioni di (7.15) hanno *due gradi di libertà*: fissato l'istante iniziale t_0 , ogni coppia $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ determina univocamente una soluzione di (7.15) e questo crea una corrispondenza lineare e biunivoca tra l'insieme delle soluzioni di (7.15) e $\mathbb{R}^2$. Questo significa che l'integrale generale di (7.15) è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Basta quindi trovare due soluzioni non proporzionali di (7.15). I risultati ottenuti per le equazioni lineari del prim'ordine nel Paragrafo 7.4 suggeriscono di cercarle del tipo $y(t) = e^{\lambda t}$. Sostituendo nella (7.15), si trova che $\lambda \in \mathbb{C}$ soddisfa

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (7.17)$$

che viene chiamata **equazione caratteristica** associata a (7.15). Si possono verificare tre casi:

- $b^2 > 4c$: in tal caso, (7.17) ammette due soluzioni reali $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e le soluzioni cercate sono semplicemente

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

- $b^2 < 4c$: in tal caso, (7.17) ammette due soluzioni complesse coniugate $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) e, usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso, si trovano le soluzioni

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

che sono combinazioni lineari (complesse) di $e^{\alpha \pm i\beta}$.

- $b^2 = 4c$: in tal caso, (7.17) ammette due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$; il lettore può verificare che due soluzioni non proporzionali sono

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t}.$$

Resta così provata la

Proposizione 7.16. *L'integrale generale dell'equazione omogenea (7.15) è dato da:*

$$\begin{aligned} \text{se } b^2 > 4c : & \quad c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ soluzioni di (7.17)} \\ \text{se } b^2 < 4c : & \quad c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad \text{con } \alpha \pm i\beta \text{ soluzioni di (7.17)} \\ \text{se } b^2 = 4c : & \quad c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ soluzione di (7.17)} \end{aligned}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

Per determinare un integrale particolare di (7.14) possiamo procedere in due modi distinti.

• **Metodo di somiglianza.** Se la forzante f ha una forma “semplice” possiamo cercare soluzioni particolari di (7.14) che le somiglino.

Se f è un *polinomio*, cerchiamo soluzioni polinomiali. Più precisamente, se f è un polinomio di grado n cerchiamo soluzioni polinomiali di grado n se $c \neq 0$, di grado $(n+1)$ se $c = 0$ e $b \neq 0$, di grado $(n+2)$ se $c = b = 0$. Il motivo di questa distinzione è che nel membro di sinistra della (7.14) deve rimanere un polinomio che ha lo stesso grado di f .

Se f è *esponenziale*, cerchiamo soluzioni esponenziali. Più precisamente, se $f(t) = e^{\lambda t}$ cerchiamo soluzioni del tipo $y(t) = ce^{\lambda t}$ se λ non risolve (7.17), del tipo $y(t) = cte^{\lambda t}$ se λ è soluzione semplice dell'equazione (7.17), del tipo $y(t) = ct^2 e^{\lambda t}$ se λ è soluzione doppia dell'equazione (7.17).

Se f è *esponenziale complessa*, cerchiamo soluzioni esponenziali complesse. Più precisamente, se $f(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\beta t) + Be^{\alpha t} \sin(\beta t)$ (possibilmente $\alpha = 0$ ma anche A o B nullo) cerchiamo soluzioni del tipo $y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ se $\alpha \pm i\beta$ non risolvono (7.17), del tipo $y(t) = c_1 t e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 t e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ se $\alpha \pm i\beta$ sono le soluzioni di (7.17).

Altre f dove il metodo di somiglianza è possibile sono combinazioni lineari delle precedenti, oppure polinomi per esponenziali reali o complessi. Quando però f non ha nessuna forma “ragionevole” (ad esempio $f(t) = \tan t$), dobbiamo procedere in un altro modo.

• **Metodo della variazione delle costanti arbitrarie.** Una volta trovato l'integrale generale dell'equazione omogenea associata (7.15), si veda la Proposizione 7.16, per trovare un integrale particolare di (7.14) facciamo variare le costanti c_1 e c_2 considerandole come funzioni. Cerchiamo dunque una soluzione particolare di (7.14) del tipo

$$\bar{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) \quad (7.18)$$

dove y_1 e y_2 sono soluzioni non proporzionali di (7.15), si veda ancora la Proposizione 7.16. Ci sono diverse scelte possibili per $c_1(t)$ e $c_2(t)$; vediamone una.

Proposizione 7.17. *Se $c_1, c_2 \in C^1(I)$ soddisfano le condizioni*

$$c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) = 0, \quad c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) = f(t), \quad (7.19)$$

allora la funzione $\bar{y}$ definita in (7.18) risolve (7.14).

Infatti, se deriviamo l'espressione di $\bar{y}$ in (7.18), otteniamo

$$\bar{y}' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

dove abbiamo usato la prima delle (7.19). Derivando nuovamente otteniamo

$$\bar{y}'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + f$$

dove abbiamo usato la seconda delle (7.19). Pertanto,

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + b\bar{y}' + c\bar{y} &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + f + b(c_1 y_1' + c_2 y_2') + c(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 (y_1'' + b y_1' + c y_1) + c_2 (y_2'' + b y_2' + c y_2) + f = f \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che y_1 e y_2 risolvono (7.15). Abbiamo così dimostrato la Proposizione 7.17. $\square$

Resta da stabilire se sia possibile trovare una coppia di funzioni (c_1, c_2) che soddisfa il sistema (7.19). Usando la regola di Cramer, si ottiene

$$c_1' = \frac{-f y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}, \quad c_2' = \frac{f y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad (7.20)$$

e, integrando, otteniamo c_1 e c_2 ; osserviamo che l'integrale indefinito genera delle costanti arbitrarie che non hanno importanza dato che, a loro volta, generano soluzioni dell'equazione omogenea associata (7.15). I denominatori in (7.20) sono diversi da 0 perché y_1 e y_2 non sono proporzionali.

Torniamo un attimo indietro al metodo di somiglianza e chiediamoci perché c'è così tanta differenza tra le candidate soluzioni nel caso in cui i parametri in gioco risolvono o meno l'equazione caratteristica (7.17). In questi casi si dice che il segnale f è in **risonanza** con l'equazione. Per spiegare questo fenomeno, consideriamo l'equazione

$$y''(t) + y(t) = \varepsilon \cos t \quad (\varepsilon > 0).$$

Seguendo uno dei due metodi qui sopra descritti, il suo integrale generale è dato da $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{\varepsilon}{2} t \sin t$. Per qualunque tipo di condizioni iniziali (cioè per qualunque coppia di valori c_1 e c_2) e per quanto piccolo possa essere ε , la “parte principale” della soluzione è data da $\frac{\varepsilon}{2} t \sin t$ dato che, per $t \rightarrow \infty$, tende ad ampliare le proprie oscillazioni. Per questo motivo, queste oscillazioni vengono anche chiamate “auto-eccitanti”. Questo fenomeno è visibile, sia pure in misura minore, anche nel caso in cui l'equazione omogenea abbia soluzioni di tipo esponenziale. Consideriamo l'equazione

$$y''(t) - y(t) = \varepsilon e^t \quad (\varepsilon > 0).$$

L'integrale generale è dato da $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{\varepsilon}{2} t e^t$ e la parte principale (solo per $t \rightarrow +\infty$) è data da $\frac{\varepsilon}{2} t e^t$.

Esercizio 7.18. Ripetere il ragionamento qui sopra per le equazioni

$$(i) y''(t) = \varepsilon t, \quad (ii) y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \varepsilon e^t, \quad (\varepsilon > 0).$$

Integrale generale e parte principale di (i):

Integrale generale e parte principale di (ii):

Esempio 7.19. Al variare del parametro $\alpha > 0$, risolviamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + \alpha y(t) = \cos t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Equazione omogenea associata: $y'' + \alpha y = 0$. Equazione caratteristica: $\lambda^2 + \alpha = 0$, con $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$. Integrale generale dell'equazione omogenea: $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}t)$.

Distinguiamo ora due casi: $\alpha \neq 1$ (non c'è risonanza) e $\alpha = 1$ (c'è risonanza).

• Se $\alpha \neq 1$, l'integrale particolare dell'equazione completa lo cerchiamo del tipo $\bar{y}(t) = a \cos t + b \sin t$: si trova $a = \frac{1}{\alpha-1}$ e $b = 0$. Allora, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}t) + \frac{1}{\alpha-1} \cos t.$$

Imponendo le condizioni in $t = 0$, si trova $c_1 = \frac{1}{1-\alpha}$ e $c_2 = 0$: la soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y_\alpha(t) = \frac{1}{1-\alpha} \cos(\sqrt{\alpha}t) + \frac{1}{\alpha-1} \cos t \quad (\alpha \neq 1). \quad (7.21)$$

• Se $\alpha = 1$, l'integrale particolare dell'equazione completa lo cerchiamo del tipo $\bar{y}(t) = at \sin t + bt \cos t$: si trova $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$. Allora, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} t \sin t.$$

Imponendo le condizioni in $t = 0$, si trova $c_1 = c_2 = 0$: la soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$y_1(t) = \frac{1}{2} t \sin t. \quad (7.22)$$

• Se $\alpha \neq 1$ ma $\alpha \rightarrow 1$, dimostriamo che la soluzione y_α in (7.21) converge alla soluzione y_1 in (7.22). Usando la formula di prostaferesi

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$$

possiamo esprimere y_α come

$$y_\alpha(t) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\cos(\sqrt{\alpha}t) - \cos t \right] = \frac{2}{\alpha-1} \cdot \sin \frac{(\sqrt{\alpha}-1)t}{2} \cdot \sin \frac{(\sqrt{\alpha}+1)t}{2}.$$

Usando poi lo sviluppo asintotico della funzione seno, troviamo

$$y_\alpha(t) \sim \frac{2}{\alpha-1} \cdot \frac{(\sqrt{\alpha}-1)t}{2} \cdot \sin t \rightarrow \frac{t}{2} \sin t = y_1(t) \quad \text{per } \alpha \rightarrow 1.$$

Concludiamo questo paragrafo con un esempio di equazione lineare del second'ordine a coefficienti variabili, ma riconducibile a coefficienti costanti. Si tratta dell'equazione di **Eulero** che, nella sua forma generale, si scrive

$$t^2 y''(t) + bty'(t) + cy(t) = f(t) \quad t > 0 \quad (7.23)$$

dove $b, c \in \mathbb{R}$. Confrontata con (7.14), notiamo la presenza dei coefficienti t^k davanti alla derivata k -esima di y ($k = 0, 1, 2$). L'equazione (7.23) non può scriversi in forma normale se $t = 0$: ecco il motivo della restrizione $t > 0$. Naturalmente, si poteva anche restringere a $t < 0$. Se f è continua, si ha esistenza e unicità per il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_1$ purché $t_0 \neq 0$.

Anche per la (7.23) vale il principio di sovrapposizione e si applica il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Vediamo dunque solo come si risolve l'equazione omogenea:

$$t^2 y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0 \quad t > 0. \quad (7.24)$$

Posto $t = e^s$, risulta $s = \log t$ e

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{y'(s)}{t}, \quad y''(t) = \frac{y''(s)}{t^2} - \frac{y'(s)}{t^2};$$

pertanto, la (7.24) diventa

$$y''(s) + (b-1)y'(s) + cy(s) = 0 \quad s \in \mathbb{R}$$

che è del tipo (7.14).

Esempio 7.20. Posto $t = e^s$, l'equazione di Eulero $t^2 y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0$ diventa $y''(s) + y(s) = 0$ il cui integrale generale è $y(s) = c_1 \cos s + c_2 \sin s$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione di partenza è $y(t) = c_1 \cos(\log t) + c_2 \sin(\log t)$.

8 Sistemi differenziali lineari

8.1 Il principio di sovrapposizione

Siano $A = A(t)$ e $b = b(t)$, rispettivamente, una matrice $n \times n$ e un vettore di $\mathbb{R}^n$, dipendenti con continuità da un parametro reale $t \in I$, dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Il sistema di n equazioni

$$y' = A(t)y + b(t) \quad (t \in I) \quad (8.1)$$

si chiama **sistema differenziale lineare**; l'incognita è il vettore $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$. Dette $y_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) le componenti del vettore y , il sistema (8.1) si scrive anche

$$y'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j(t) + b_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

dove $a_{ij}(t)$ sono gli elementi della matrice $A(t)$ e $b_i(t)$ sono le componenti del vettore $b(t)$. Nel caso $n = 1$ il sistema (8.1) si riduce a una sola equazione del tipo (7.9) e questo caso è stato studiato in dettaglio nel Paragrafo 7.4. Nel caso $n = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + b_1(t) \\ y'_2 = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + b_2(t) \end{cases}.$$

Le equazioni lineari di ordine qualunque si possono sempre ricondurre alla forma di un sistema differenziale lineare come (8.1).

Esercizio 8.1. *Sia data una generica equazione lineare di ordine n in forma normale, e cioè,*

$$y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)y^{(k)}(t) + f(t). \quad (8.2)$$

Posto $y_i(t) = y^{(i-1)}(t)$ per $i = 1, \dots, n$, riscrivere l'equazione (8.2) nella forma di un sistema lineare come (8.1) esplicitando la matrice $A(t)$ e il vettore $b(t)$.

Per risolvere la (7.9) ($n = 1$) abbiamo usato due metodi ben distinti tra loro: il metodo che usa la derivata di un prodotto e il metodo che usa contemporaneamente il principio di sovrapposizione e la variazione delle costanti arbitrarie. Tranne che in casi molto particolari, nel caso del sistema (8.1) ($n \geq 2$) non sarà possibile evidenziare la derivata di un prodotto; sarà invece possibile usare una forma generalizzata del secondo metodo.

Un vettore $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$ è soluzione di (8.1) se la soddisfa per ogni $t \in I$. L'insieme di tutte le soluzioni di (8.1) viene ancora chiamato integrale generale. Chiameremo **sistema omogeneo associato** a (8.1) il sistema

$$y' = A(t)y \quad (t \in I). \quad (8.3)$$

Con un ragionamento analogo a quello del Paragrafo 7.4 si dimostra che

l'integrale generale di (8.1) si ottiene sommando all'integrale generale del sistema omogeneo associato (8.3) un integrale particolare di (8.1).

Come vedremo nei prossimi paragrafi, l'integrale generale del sistema omogeneo (8.3) è uno spazio vettoriale di dimensione n e basterà quindi trovare una base di esso, e cioè n soluzioni linearmente indipendenti (in un senso opportuno) del sistema (8.3); ricordiamo che per $n = 1$ la soluzione dell'equazione omogenea è unica a meno di una costante moltiplicativa e l'integrale generale è quindi uno spazio vettoriale mono-dimensionale. Inoltre, vedremo che per trovare un integrale particolare di (8.1) è ancora possibile sfruttare il sistema (8.3) e far variare le costanti.

8.2 Sistemi lineari omogenei

Nel caso in cui $b(t) = 0$, il sistema (8.1) diventa

$$y' = A(t)y \quad (t \in I) \quad (8.4)$$

e viene detto omogeneo: è anche il sistema omogeneo associato a (8.1), si veda la (8.3). Associato al sistema (8.4) abbiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = A(t)y & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (8.5)$$

dove $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dall'Esercizio 8.1 deduciamo poi che il problema di Cauchy associato all'equazione lineare (8.2) è

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

con $y_k \in \mathbb{R}$ ($k = 0, \dots, n-1$).

La versione vettoriale dei Teoremi 7.2 e 7.15 fornisce il seguente risultato.

Teorema 8.2. *Sia $A \in C^0(I)$ e sia $t_0 \in I$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il problema (8.5) ammette un'unica soluzione che è prolungabile a tutto l'intervallo I .*

Il Teorema 8.2 ha delle importanti conseguenze. Come prima cosa, osserviamo che se $y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$, allora l'unica soluzione di (8.5) è $y(t) \equiv 0$. Dalla forma esplicita di (8.4) deduciamo poi che il suo integrale generale è uno spazio vettoriale: se φ_1 e φ_2 risolvono (8.4), allora anche $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ risolve (8.4) per ogni scelta di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pertanto, il Teorema 8.2 ci permette di dedurre il

Corollario 8.3. *L'integrale generale del sistema lineare omogeneo (8.4) è uno spazio vettoriale di dimensione n .*

Infatti, fissato $t_0 \in I$, il Teorema 8.2 definisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle soluzioni e i vettori y_0 di $\mathbb{R}^n$.

Il problema si riduce quindi a trovare n soluzioni linearmente indipendenti del sistema (8.4). In generale, questa ricerca è assai difficile. Tuttavia, come per le equazioni del second'ordine (si veda il Paragrafo 7.7), se la matrice dei coefficienti A è costante esiste un metodo che consente di trovarle; ci occuperemo di questo nel successivo Paragrafo 8.3.

Fissate n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (8.4), ci poniamo adesso il problema di capire se esse siano linearmente indipendenti. Riprendendo la ben nota definizione di vettori linearmente indipendenti e considerando le funzioni stesse come vettori, possiamo dire che

n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (8.4) sono linearmente indipendenti se l'equazione

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = 0 \quad (t \in I) \quad (8.6)$$

può essere soddisfatta solo per $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Questa definizione merita attenzione. Come prima cosa, osserviamo che le costanti c_k sono scalari, in linea con la solita definizione di combinazione lineare per spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Come seconda cosa, osserviamo che lo "0" a secondo membro di (8.6) deve considerarsi alla stregua di un vettore nello spazio vettoriale in questione; siccome i vettori sono funzioni, lo "0" rappresenta la funzione identicamente nulla nell'intervallo I . Ma il Teorema 8.2 ci permette di concludere che *la combinazione lineare in (8.6) si annulla in un certo $t_0 \in I$ se e solo se si annulla su tutto I* . Per provare l'indipendenza lineare delle **funzioni** φ_k basta quindi verificare che i **vettori** $\varphi_k(t_0)$ siano linearmente indipendenti per un certo $t_0 \in I$. Per formalizzare questa importante proprietà introduciamo la **matrice wronskiana** associata alle funzioni (vettoriali) φ_k ; questa si ottiene accostando i vettori colonna $\varphi_k(t)$:

$$W(t) = \left(\varphi_1(t) \mid \varphi_2(t) \mid \dots \mid \varphi_n(t) \right) \quad (t \in I).$$

Chiamiamo **determinante wronskiano** il suo determinante $|W(t)|$. Con queste definizioni e per quanto appena esposto, risulta dimostrato il

Teorema 8.4. *Le n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di (8.4) sono linearmente indipendenti se e solo il loro determinante wronskiano è diverso da zero in un punto di I :*

$$\exists t_0 \in I, \quad |W(t_0)| \neq 0.$$

Il Teorema 8.4 fornisce il criterio voluto, consente di stabilire facilmente se n soluzioni di (8.4) sono linearmente indipendenti. In tal caso, diremo che la famiglia di soluzioni $\{\varphi_k\}$ è un **sistema fondamentale di soluzioni** di (8.4) e che la corrispondente matrice wronskiana è una matrice fondamentale. Per il Teorema 8.4, una matrice wronskiana è fondamentale se e solo se il suo determinante è diverso da zero in almeno un punto $t_0 \in I$.

Esercizio 8.5. Utilizzando l'Esercizio 8.1, determinare la matrice wronskiana di n soluzioni dell'equazione omogenea associata a (8.2).

Dette $y_1, \dots, y_n$ le soluzioni di (8.2) (con $f = 0$), risulta

$$\varphi_k(t) = \begin{pmatrix} y_k(t) \\ y'_k(t) \\ \dots \\ y_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \implies W(t) = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Una matrice fondamentale W gode di alcune proprietà di facile verifica:

- il vettore $y = y(t)$ è soluzione di (8.4) se e solo se esiste $C \in \mathbb{R}^n$ tale che $y(t) = W(t)C$;

- la matrice W soddisfa l'equazione (matriciale!)

$$W'(t) = A(t)W(t); \quad (8.7)$$

- detta $a(t)$ la traccia di $A(t)$, il determinante wronskiano soddisfa l'equazione (scalare!) $|W(t)|' = a(t)|W(t)|$;

- fissato $t_0 \in I$ come istante iniziale, il determinante wronskiano in t è esplicitamente dato da $|W(t)| = |W(t_0)| \exp(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau)$.

Le ultime due proprietà confermano che $W(t)$ è sempre singolare oppure non lo è mai.

8.3 Sistemi omogenei a coefficienti costanti

In questo paragrafo studiamo il sistema omogeneo (8.4) nel caso in cui la matrice A sia costante:

$$y' = Ay \quad (t \in I). \quad (8.8)$$

Se $n = 1$ (A scalare), l'integrale generale è dato da $y(t) = Ce^{At}$ con $C \in \mathbb{R}$. Se $n = 2$, il sistema (8.8) si scrive come

$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,2}; \quad (8.9)$$

questo sistema si può ricondurre a un'equazione del second'ordine. Se $a_{12} \neq 0$, derivando la prima equazione e sostituendo la seconda si ottiene

$$y''_1 = (a_{11} + a_{22})y'_1 + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})y_1 \quad (8.10)$$

che si risolve con i metodi visti nel Paragrafo 7.7 (osserviamo che i coefficienti sono, rispettivamente, la traccia e l'opposto del determinante di A); la stessa equazione è soddisfatta da y_2 se $a_{21} \neq 0$, nelle (8.9) il ruolo di y_1 e y_2 si scambia se $a_{12}a_{21} \neq 0$, entrambe possono essere viste sia come incognita che come forzante.

Queste osservazioni suggeriscono ancora di cercare le soluzioni del sistema (8.8) tra gli esponenziali, eventualmente complessi (funzioni trigonometriche). La risoluzione di (8.8) nel caso generale è però piuttosto delicata.

Alla luce di quanto appena ricordato per il caso scalare ($n = 1$), sarebbe utile poter definire in qualche modo la matrice esponenziale e^{At} e dedurre che le soluzioni di (8.8) sono tutte e sole del tipo $e^{At}C$ con $C \in \mathbb{R}^n$ vettore arbitrario. Il modo migliore per definire la matrice esponenziale di una matrice M è quello di prendere spunto sia dalla definizione del numero e che dalla serie di potenze dell'esponenziale (si veda il Paragrafo 6.1.2):

$$e^M = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(I_n + \frac{M}{k} \right)^k, \quad e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

dove I_n rappresenta la matrice identità $n \times n$. Si dimostra che la successione converge, che la serie ha somma finita e che le due definizioni coincidono. È però chiaro che queste due definizioni non possono essere usate in modo semplice per calcolare e^M . Ci sono due situazioni dove il calcolo si fa agevolmente.

Se M è diagonale, si ottiene semplicemente l'esponenziale della diagonale:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \implies e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Se M è diagonalizzabile, e cioè esiste una matrice non singolare S tale che $\Lambda = S^{-1}MS$ sia diagonale, allora

$$M = S\Lambda S^{-1} \implies M^k = S\Lambda^k S^{-1} \implies e^M = S e^{\Lambda} S^{-1}$$

con e^{Λ} che si calcola come nella (8.11). Ricordiamo che una matrice quadrata è diagonalizzabile se e solo se tutti i suoi autovalori sono regolari. Precisiamo che vengono considerati anche autovalori complessi che, per una matrice a coefficienti reali, possono esserci se e solo se c'è anche il loro coniugato. In tal caso, gli esponenziali dipendenti dal tempo vanno interpretati con la formula di Eulero e generano funzioni trigonometriche.

Esempio 8.6. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ (doppio) e $\lambda_2 = 2$, tutti regolari. Allora

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \Lambda = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto,

$$e^A = S e^{\Lambda} S^{-1} = \begin{pmatrix} e & 3e(e-1) & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e(e-1) & e \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque visto come si trova l'esponenziale di una matrice diagonalizzabile costante. Volendo trovare l'esponenziale della matrice At , facciamo un paio di osservazioni elementari:

- se A è diagonalizzabile, lo è anche At (per ogni $t \in \mathbb{R}$) e si può usare la stessa matrice di passaggio S per diagonalizzarla;
- gli autovalori di At sono uguali agli autovalori di A moltiplicati per t .

Da queste osservazioni possiamo dedurre l'implicazione

$$e^A = S e^\Lambda S^{-1} \implies e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}. \quad (8.12)$$

Possiamo adesso enunciare il principale risultato per la risoluzione di (8.8):

Teorema 8.7. *Le colonne della matrice e^{At} formano un sistema fondamentale di soluzioni di (8.8) e cioè, per ogni $C \in \mathbb{R}^n$ il vettore $e^{At}C$ è una soluzione di (8.8).*

Il Teorema 8.7 è proprio il risultato che cercavamo, possiamo infatti generalizzare quanto già sappiamo per l'equazione scalare $n = 1$. Il Teorema 8.7 vale anche se A non è diagonalizzabile ma, in questo caso, la determinazione di e^{At} è molto più delicata, si veda l'Esempio 8.9 alla fine di questo paragrafo. Infine, il Teorema 8.7 permette di concludere che

la funzione $\varphi(t) = Ce^{\lambda t}$ è soluzione di (8.8) se e solo se λ è un autovalore di A (possibilmente complesso) e C è un autovettore associato a λ .

Quest'ultimo risultato si può anche dimostrare direttamente prendendo $\varphi(t) = Ce^{\lambda t}$ e derivando.

Esercizio 8.8. *Determinare l'integrale generale del sistema lineare 3×3 :*

$$y'_1 = y_1 + 3y_2, \quad y'_2 = 2y_2, \quad y'_3 = y_2 + y_3.$$

Dato che il sistema si scrive $Y' = AY$ con A come nell'Esempio 8.6, dal Teorema 8.7 deduciamo

$$W(t) = e^{At} = \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \implies Y(t) = \quad .$$

Verificare il risultato ottenuto con la relazione (8.7).

Concludiamo questo paragrafo con un cenno al caso in cui la matrice A in (8.8) non è diagonalizzabile. Il Teorema 8.7 evidenzia come gli autovalori multipli (gli unici candidati a essere irregolari) si possano “sistemare” nel caso vi siano altrettanti autovettori linearmente indipendenti, cosa che avviene se e solo se l'autovalore è regolare. D'altra parte, nel Paragrafo 7.7 abbiamo visto che esistono anche soluzioni che non sono esponenziali (né reali, né complessi), si veda la Proposizione 7.16, caso $b^2 = 4c$. Sono proprio questi casi a creare problemi, autovalori multipli con molteplicità geometrica inferiore alla molteplicità algebrica. Ci limitiamo a mostrarlo con un semplice esempio.

Esempio 8.9. Si consideri il sistema (8.8) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$ doppio ma gli unici autovettori sono proporzionali a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pertanto, A non è diagonalizzabile. Riducendo il sistema a un'equazione, si veda (8.10) con $a_{12} = 0$, otteniamo $y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0$ che rientra nel caso $b^2 = 4c$ della Proposizione 7.16. Pertanto $y_2(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$ (con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) e le soluzioni non sono di tipo esponenziale.

8.4 Sistemi non omogenei

Ritorniamo all'analisi del sistema (8.1) e consideriamo anche per esso il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) & (t \in I) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (8.13)$$

dove $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Analogamente al Teorema 8.2 abbiamo il

Teorema 8.10. Siano $A, b \in C^0(I)$ e sia $t_0 \in I$. Per ogni $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy (8.13) ammette un'unica soluzione che è prolungabile a tutto l'intervallo I .

Volendo applicare il principio di sovrapposizione descritto nel Paragrafo 8.1, supponiamo di avere già trovato l'integrale generale del sistema omogeneo associato (8.3) e cerchiamo un integrale particolare di (8.1). All'uopo, useremo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Sia dunque $\{\varphi_k\}_{k=1,\dots,n}$ un sistema fondamentale di soluzioni di (8.3) e sia $W(t)$ la corrispondente matrice (wronskiana) fondamentale. Allora, l'integrale generale di (8.3) si scrive nella forma $y(t) = W(t)C$ con $C \in \mathbb{R}^n$ vettore arbitrario. Cerchiamo una soluzione particolare di (8.1) del tipo

$$\varphi(t) = W(t)C(t) \quad (t \in I) \quad (8.14)$$

dove, adesso, il vettore $C(t)$ può dipendere da t . Imponendo alla funzione vettoriale φ definita in (8.14) di soddisfare (8.1) otteniamo

$$W'(t)C(t) + W(t)C'(t) = A(t)W(t)C(t) + b(t) \quad (t \in I)$$

e, usando la (8.7), si deduce

$$W(t)C'(t) = b(t) \implies C'(t) = [W(t)]^{-1} b(t) \implies C(t) = \int [W(\tau)]^{-1} b(\tau) d\tau. \quad (8.15)$$

La (8.15) necessita di alcune precisazioni. La matrice $[W(t)]^{-1}$ è l'inversa della matrice $W(t)$ che è ben definita per il Teorema 8.4. Tale matrice va poi

applicata al vettore $b(t)$ (ottenendo così un altro vettore) e poi integrata: dobbiamo quindi integrare un vettore dipendente da t e questo si fa componente per componente, come abbiamo già fatto per i limiti, la continuità e il calcolo delle derivate, si veda il Capitolo 2. Infine, l'integrale in (8.15) è indefinito e risulta determinato a meno di un vettore costante arbitrario.

Inserendo la forma trovata per $C(t)$ in (8.15) nella forma cercata (8.14) otteniamo

$$\varphi(t) = W(t) \int [W(\tau)]^{-1} b(\tau) d\tau \quad (t \in I). \quad (8.16)$$

Questa formula generalizza quanto già visto nel Paragrafo 7.4 per l'equazione scalare ($n = 1$). In particolare, se A è costante il Teorema 8.7 afferma che possiamo prendere $W(t) = e^{At}$ e la (8.16) diventa $\varphi(t) = e^{At} \int e^{-A\tau} b(\tau) d\tau$ proprio come per l'equazione scalare. Se A è variabile, la matrice fondamentale sostituisce l'esponenziale della primitiva di $a(t)$ in (7.9), si veda la (7.10).

Come applicazione di quanto appena visto, siano $b, c, f \in C^0(I)$ e cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione lineare completa del second'ordine

$$y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \quad (t \in I) \quad (8.17)$$

supponendo di conoscere due soluzioni φ_1 e φ_2 linearmente indipendenti (e cioè, non proporzionali) dell'equazione omogenea associata

$$y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (t \in I). \quad (8.18)$$

Nel caso di coefficienti costanti ($b(t) \equiv b$ e $c(t) \equiv c$) si ritrova l'equazione (7.15) ed è possibile applicare la Proposizione 7.16 per determinare le soluzioni φ_1 e φ_2 . Seguendo il suggerimento dell'Esercizio 8.1, poniamo $y_1 = y$ e $y_2 = y'$ e, al posto di (8.17), otteniamo il sistema

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

che è del tipo (8.1) con

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c(t) & -b(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Sempre seguendo l'Esercizio 8.1, abbiamo che una matrice fondamentale del sistema omogeneo associato è data da

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix} \implies [W(t)]^{-1} = \frac{1}{|W(t)|} \begin{pmatrix} \varphi_2'(t) & -\varphi_2(t) \\ -\varphi_1'(t) & \varphi_1(t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8.11. Concludere la costruzione di una soluzione particolare dell'equazione (8.17). Utilizzando la (8.16)...

Il volume tratta i seguenti argomenti: integrali generalizzati e serie numeriche, curve nel piano e nello spazio, funzioni reali di più variabili, integrazione multipla, funzioni di più variabili a valori vettoriali, serie di funzioni, equazioni differenziali, sistemi differenziali lineari.

FILIPPO GAZZOLA è professore ordinario di analisi matematica al Politecnico di Milano. È autore di oltre 150 articoli scientifici, di 3 monografie e di 3 libri didattici. Le sue ricerche vertono sulle equazioni alle derivate parziali, sulle disuguaglianze in analisi funzionale e sul calcolo delle variazioni. Negli ultimi tempi, il suo interesse si è concentrato sulle interazioni fluido-struttura e sui modelli matematici per ponti sospesi per i quali è anche titolare di un brevetto.



Feedback

ISBN 978-88-9385-309-5



Euro 18,00



Società Editrice
ESCULAPIO

www.editrice-esculapio.it